FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

Tomus XII.

AD ANNVM MDCCXL.



PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE
cIↄ Iↄ cc L.

c6.70262 april 28

INDEX
COMMENTARIORVM.

In Claſſe Mathematica

L. Euleri, Inueſtigatio curuarum, quae euolutae ſui ſimiles producunt. p. 3.

Eiusd. De ſeriebus quibusdam conſiderationes. p. 53.

Dan. Bernoulli, Commentationes de oſcillationibus compoſitis, praeſertim iis, quae fiunt in corporibus ex filo flexili ſuſpenſis. p. 97.

L. Euleri, Emendatio tabularum Aſtronomicarum per loca planetarum Geocentrica. p. 109.

C. N. de Winsheim Determinatio exactior graduum parallelorum aequatoris et meridiani, in figura telluris hypothetice *ſphaerica*, aut (prouti per recentiſſimam dimenſionem ſtabilitur) *ſphaeroide*. p. 222.

In Claſſe Phyſica

G. W. Krafftii, De loco imaginis puncti radiantis in ſpeculum curuilineum diſſertatio catoptrica p. 243.

Eiusd. De corporum plano inclinato impoſitorum deſcenſu. p. 261.

Eiusd. De viribus attractionis magneticae experimenta. p. 276.

I. Ammani, Deſcriptio Caſſiae Americanae procumbentis, herbaceae, mimoſae foliis, floribus paruis, ſiliquis anguſtis, planis. p. 288.

C. E.

C. E. *Gellertii* De phaenomenis plumbi fuſi in tubis capillaribus. p. 293.
Eiuſd. De tubis capillaribus priſmaticis. p. 302.
I. C. *Wildii* Obſeruationes Anatomicae rariores p. 312.
1. De vena caua duplici aſcendente. ibid.
2. De vena iugulari externa, quoad progreſſum, triplici, quoad inſertionem autem, quadruplici. p. 316.
3. De venae Azigos trunco duplici p. 318.
4. De muſculo ſingulari gemino ſternum ſuperiacente. p. 320.
5. De tendinum, digitos manus ſiniſtrae extendentium, extraordinario numero. p. 321.
6. De inteſtino coeco et proceſſu vermiculari. p. 324.
Eiuſd. de renibus ſuccenturiatis in puero diſquiſitis notata. p. 327.

Obſeru. Aſtronom.

G. Heinſii, Obſeruatio Eclipſis ſolaris d. $\frac{24.\ \text{Iul.}}{4.\ \text{Aug.}}$ 1739. in Obſeruatorio Imp. Petropolitano habita. p. 333.
Eiuſd. Obſeruatio tranſitus lunae ad Saturnum d. $\frac{20.\ \text{April}}{1.\ \text{Maii}}$ 1740. Petropoli habita. p. 349.
Eiuſd. De declinationum ſyderum determinatione absque exacta eleuationis aequatoris cognitione. p. 352.

CLASSIS PRIMA
CONTINENS
MATHEMATICA

INVESTIGATIO CVRVARVM
QVAE EVOLVTAE SVI SIMILES PRODVCVNT

A. L. Eulero.

§. 1.

In hac diſſertatione nomini euolutarum aliquanto latiorem ſignificationem tribuo, quam vulgo fieri ſolet, ac non ſolum eam curuam, ex cuius euolutione data curua naſcitur, huius euolutam appello, ſed inſuper euolutam huius euolutae, ſimiliterque vniuerſam curuarum ſeriem, quarum quaelibet praecedentis eſt euoluta; interim tamen hoc diſcrimen in denominatione obſeruabo, vt ipſam datae curuae euolutam, quae hoc nomine inſigniri conſueuit, eius euolutam primam appellem, huius vero euolutam ſecundam, eamque ex cuius euolutione iſta naſcitur, tertiam atque ita porro. Sic ſi datae curuae A euoluta ſit curua B, curuae autem B euoluta C, atque huius curuae C euoluta D, huiusque E et ita deinceps, erit mihi reſpectu curuae A curua B euoluta prima, curua C euoluta ſecunda, curua D euoluta tertia, E quarta atque ita porro. Tab. I.

§. 2. Hac vocis euolutae ſignificatione praemiſſa in hac diſſertatione in eas curuas inquirere conſtitui, quarum euolutae vel primae vel ſecundae vel tertiae etc. ipſis ſint ſimiles. Quod quidem ad euolutas primas attinet a Viro Clariſſimo Prof. Krafft iam eſt oſtenſum, praeter ſpiralem logarithmicam et cycloidem alias non dari curuas, quae cum ſuis euolutis primis conueniant; atque idem alia methodo hic ſum demonſtraturus, quae ſimul viam praeparet ad eas curuas inueſtigandas, quae ſimiles ſint ſuis euo-

 lutis

lutis vel ſecundis vel tertiis, etc. Neque vero in hoc negotio viam ſimpliciſſimam ſum ſecuturus, quae facillime ad cognitionem curuarum quaeſitarum manuducat; ſed praecipue mihi propoſitum eſt relationem inter arcum curvae et reſpondentem radium curuedinis inueſtigare, quae etſi differentialibus altiorum graduum eſt inuoluta, quae alia methodo plerumque euitari poſſunt, tamen magis videtur genuina atque ad inſtitutum accommodata. Praeterea vero non tam ſollicitus ero de ipſis his curuis definiendis quam de ratione aequationes differentiales altiorum graduum debito modo tractandi, ex iisque curuas, ad quas pertineant aſſignandi. Eum ſcilicet in finem hoc negotium potiſſimum ſuſcepi, vt varias vias aequationum differentialium altiorum graduum reſoluendarum patefacerem, quae in plurimis aliis caſibus vtilitatem non contemnendam afferre queant.

§. 3. Initium igitur facio ab iis curuis inueſtigandis

Fig. 1. quae ſimiles ſint ſuis euolutis primis, quae quaeſtio duplicem requirit ſolutionem. Primo enim, ſi curua quaeſita ponatur A M B, cuius euoluta ſit *amb*, quaeſtioni ſatisfiet, ſi curua *amb* ita fuerit ſimilis curuae A M B, vt punctum *a* homologum ſit puncto A, *b* homologum puncto B, atque quoduis punctum *m* homologum illi puncto M, ex cuius euolutione naſcitur. Hoc enim ipſa natura euolutionis et ſimilitudinis poſtulat, ſi enim punctum *a* homologum fuerit puncto A, atque curua *amb* ſimilis curuae AMB: arcui cuiuis A M ſimilis erit arcus *am*, qui eſt aeque amplus, hoc eſt qui ductis normalibus ad curuas A N, M N, *an*, *mn*, angulum complectitur *anm* aequalem angulo A N M: haec vero aequalitas locum habet, ſi normalis M N producta tangat curuam *am* in *m*, ſeu *m* fuerit cen-

centrum circuli oſculantis curuam AMB in M. Cum igitur quaeſtionem hoc modo conſiderando quaelibet curuae AMB portio ſimilis ſit ſui euolutae, hanc quaeſtionis partem ita reſtringi conueniet, vt in ea quaerantur curuae, quae ſuis euolutis ſint *directe* ſimiles, hocque modo iſtam partem quaeſtionis ab altera parte diſtinguo, qua curuae quaeruntur, quae ſuis euolutis *inuerſe* ſint ſimiles.

§. 4. Inuerſam autem ſimilitudinem, qua alter quaeſtionis caſus continetur, ita animo repraeſentari oportet. Curua ſcilicet AMB ita ſimilis eſſe poteſt ſuae euolutae *bma*, vt modo inuerſo punctum *b*, quod ratione euolutionis puncto A reſpondet homologum ſit alteri extremitati B, punctum *a* ratione euolutionis puncto B reſpondens homologum puncto A; ideoque curua tota *ameb* ſimilis curuae AEMB. Quare ſi ducantur normales AC, BC, *ac* et *bc*, erit primo ex euolutionis quidem natura angulus *bca* = ang. ACB, deinde AC:BC = *ac* : *bc*. Ducatur nunc in puncto quocunque M radius oſculi M*m* euolutam in *m* tangens, erit punctum *m* ita comparatum vt normalis *mn* cum *bc* producta angulum conſtituat aequalem angulo ANM, ex quo inter puncta M et *m* iſta relatio intercedet, vt ſumma angulorum ANM + *anm* quos normales in M et *m* cum axibus AC et *ac* conſtituunt perpetuo aequalis ſit angulo ACB. Quodſi ergo in curua *ab* capiatur punctum μ homologum ipſi M, et ad μ normalis ducatur μν: erit ſumma angulorum *a*νμ + *anm* = *acb*. Dabitur igitur caſus, quo duo puncta *m* et μ conueniunt puta in *e*, id quod accidit, vbi angulus *afe* eſt ſemiſſis anguli ACB, hocque punctum *e* Fig. 2.

 erit

erit homologum ipſi puncto E cui ratione euolutionis reſpondet.

§. 5. Notatis itaque in vtraque curua punctis E et e, quae ſimul ratione ſimilitudinis ſunt homologa, atque ratione euolutionis ſibi mutuo reſpondent, reliqua puncta homologa omnia ratione euolutionis a ſe inuicem discrepabunt; ita punctum m ratione euolutionis reſpondet in curua A M B illi puncto M quod homologum eſt puncto μ, amboque puncta m et μ vtrinque circa punctum fixum e ita erunt diſpoſita, vt ductis normalibus $\mu\nu$ et mn ſumma angulorum $anm + a\nu\mu$ aequalis ſit angulo acb, vel duplo angulo afe. Quare ſi normales $\mu\nu$ et mn producantur, donec concurrant cum normali fixa ef producta in p et r, erunt anguli mre et $\mu\rho e$ aequales, arcusque em et $e\mu$ aeque ampli, eam huic vocabulo ſignificationem tribuendo, qua vſus eſt Celeb. Bernoullius in diſſertatione de motu reptorio: atque haec eſt proprietas binorum quorumque punctorum m et μ in euoluta, quorum alterum ex alterius puncto homologo per euolutionem naſcitur, haecque proprietas non ſolum communis eſt euolutis primis ſed etiam ſecundis, tertiis et omnibus ſequentibus.

§. 6. Si ergo quaeſtio de curua inuenienda proponatur, quae ſimilis ſit cuicunque euolutae, ea quaeſtio bipartito eſt tractanda, primo enim ea curua debet definiri, quae ſuae euolutae deſignatae directe ſit ſimilis, hoc eſt cuius ſingula puncta ratione euolutionis in euoluta generent puncta homologa. In altera vero ſolutionis parte in eas curuas erit inquirendum, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ordine inuerſo, hoc eſt, quarum ſingula puncta non generent

ſibi

ſibi homologa per euolutionem. Notandum autem eſt binorum horum caſuum poſteriorem ad priorem reduci, nam ſi curua AMB euolutam habeat *bma* ſibi inverſe ſimilem, eius euoluta ſecunda eidem erit directe ſimilis; ſi enim punctum M generet in euoluta prima punctum *m* ſibi non homologum, idem in euoluta ſecunda generabit punctum ſibi homologum. Simili modo, quae curua habet euolutam ſecundam ſibi ſimilem inuerſe, eadem habebit euolutam quartam ſibi directe ſimilem; ſimiliterque erit comparata ratio euolutarum reliquorum graduum. Fig. 2.

§. 7. Antequam autem ſolutionem horum problematum aggrediar, generalem nexum, quem quaeuis curua cum ſuis euolutis cuiusque ordinis tenet, conſideraſſe iuuabit. Sit igitur propoſita curua quaecunque A M cuius Fig. 3.
euoluta prima ſit B N, ſecunda euoluta C P, tertia DQ, quarta ER et ita porro; erunt ex natura euolutionis omnes arcus AM, BN, CP, DQ, ect. aeque ampli. Quare ſi in ipſa curua propoſita AM ponatur arcus $AM = s$; et radius oſculi $MN = r$; erit pro euoluta prima BN arcus $BN = a \pm r$ prout radius oſculi MN recedendo a puncto A *v*el creſcit vel decreſcit: ſecundum autem figuram eſt curua $BN = a + r$. Ob aequalem autem amplitudinem eſt euolutae primae radius oſculi $NP = \frac{rdr}{ds}$ hinc porro euolutae ſecundae CP eſt arcus $CP = b - \frac{rdr}{ds}$ ſiquidem figuram ſequamur: eiusdemque radius oſculi $PQ = -\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$. Euolutae itaque tertiae arcus DQ eſt $= c + \frac{r}{ds}.d\frac{rdr}{ds}$, eiusque radius oſculi $QR = \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$. Simili modo euolutae quartae ER eſt arcus $ER = e + \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$ atque eiusdem radius oſculi $= \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$, hocque pa-

cto

cto pro qualibet datae curuae euoluta facile erit tum arcum ratione euolutionis dato arcui s in data curua reſpondentem aſſignare, tum etiam radium oſculi; hae vero ſingulae expreſſiones tam affirmatiue ſunt accipiendae quam, negatiue, ſiquidem ſolutiones problematum proponendorum latiſſime patentes deſideramus.

§. 8. Proponatur igitur ex iſto quaeſtionum genere problema primum, quod ita ſe habet

Fig. 1. *Inuenire curuam AMB quae ſuae euolutae primae* a b m *directe ſit ſimilis.*

Ponatur pro curua quaeſita AMB arcus ad lubitum aſſumtus $AM = s$, et radius oſculi in puncto $M = r$, creſcantque radii osculi ab A verſus B recedendo, qua quidem conditione amplitudo problematis non reſtringitur, cum initium A, a quo arcus AM computantur vbi libuerit, accipi queat. Sit radius oſculi in A ſeu $Aa = a$, et quia curua amb directe ſimilis eſſe debet curuae AMB, erit arcus $am = ns$ et radius osculi euolutae in $m = ns$. Hanc ob rem ex natura euolutionis erit vel $a + ns = r$ vel $nr = \frac{rdr}{ds}$, quae ambae aequationes congruunt. Erit ergo pro curua quaeſita AM haec aequatio $s = \frac{r-a}{n}$; et quia arcus data quantitate augeri diminuiue poteſt ob initium A arbitrarium, erit $s = \frac{r}{n}$ ſeu $r = ns$; quae aequatio exprimit naturam curuae, quae euolutam habet ſui ſimilem, exiſtente ſimilitudinis ratione vt $1 : n$, haec ſcilicet ratio exprimit rationem linearum ad curuam quaeſitam pertinentium ad lineas homologas in euoluta.

§. 9. Quoniam autem ex aequatione, quae datur inter arcum et radium oſculi, natura curuae non diſtincte perſpicitur, etiamſi ex tali aequatione immediate curuae

con-

conſtructio deduci queat, eliciamus ex aequatione inuenta $r = ns$ aequationem inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$ pro eadem curua quaeſita AMB. Quum vero poſitus ſit arcus $AM = s$, erit $dx^2 + dy^2 = ds^2$; atque ſi fiat $dx = p\,ds$ et $dy = ds\,\sqrt{(1-pp)}$ erit curuae radius osculi $r = \frac{ds\,\sqrt{(1-pp)}}{dp}$. Hac itaque ſubſtitutione facta iſta emergit aequatio $\frac{ds\,\sqrt{(1-pp)}}{dp} = ns$ ſeu $\frac{n\,dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{s}$ cuius integrale eſt $n\,A$ ſin. $p = l\frac{s}{a}$, ſeu $p =$ ſin. $A\,\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$, vnde fit $\sqrt{(1-pp)} =$ coſ. $A\,\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$. Quapropter nanciſcimur $dx = ds$ ſin. $A\,\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$ et $dy = ds$ coſ. $A\,\frac{1}{n}\,l\frac{s}{a}$. Fig. 4.

§. 10. Ad has aequationes denuo integrandas ſequens, notandum eſt lemma, quod in ſolutionibus ſequentium problematum maximum afferet ſubſidium. Eſt ſcilicet:

$$\int ds \text{ ſin. } A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} = \frac{\beta s}{1+\beta} \text{ ſin. } A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} - \frac{\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}}{1+\beta} \text{ coſ. } A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$$

atque

$$\int ds \text{ coſ. } A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} = \frac{\beta s}{1+\beta} \text{ coſ. } A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} + \frac{\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}}{1+\beta} \text{ ſin. } A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$$

quae formulae vſum habent ſolo excepto caſu, quo eſt $\beta = -1$. Hoc autem caſu, quia eſt $\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = A$ ſin. $\frac{s}{\sqrt{\alpha}}$, erit ſin. $A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = \frac{s}{\sqrt{\alpha}}$; hincque $\int ds$ ſin. $A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = \frac{ss}{2\sqrt{\alpha}}$, et $\int ds$ coſ. $A\,.\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = \int\frac{ds}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{(\alpha-ss)} = \frac{s\sqrt{(\alpha-ss)}}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$ A coſ. $\frac{s}{\sqrt{\alpha}}$.

§. 11. Quia nunc in noſtro caſu eſt $\frac{1}{n}\,l\frac{s}{\alpha} = \int\frac{ds}{ns}$ erit lemmate ad hunc caſum accommodando, $\alpha = 0$, $\beta = nn$, quibus valoribus ſubſtitutis fit $x = \int ds$ ſin. $A\,.\int\frac{ds}{ns} = \frac{nns}{1+nn}$

$\frac{nns}{1+nn}$ ſin. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} - \frac{ns}{1+nn}$ coſ. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$ atque $y = \int ds$ coſ. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} = \frac{nns}{1+nn}$ coſ. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} + \frac{ns}{1+nn}$ ſin. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$: vbi in integrationibus nouis conſtantibus addendis non eſt opus, quia natura curuae non mutatur, quacunque quantitate coordinatae ſiue augeantur ſiue diminuantur. Ex his autem binis expreſſionibus, quibus coordinatae per eandem quantitatem s definiuntur, curua deſiderata ope logarithmorum et circuli poterit conſtrui; interim tamen iſta conſtructio ſatis eſt operoſa, aliaeque complures faciliores hinc deduci poſſunt.

§. 12. Vt autem ipſam curuam propius cognoſcamus, ſumamus aequationes inuentas pro coordinatis orthogonalibus:

$$x = \frac{nns}{1+nn}\,\text{ſin. A.}\,\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} - \frac{ns}{1+nn}\,\text{coſ. A.}\,\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$$
$$y = \frac{nns}{1+nn}\,\text{coſ. A.}\,\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} + \frac{ns}{1+nn}\,\text{ſin. A.}\,\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$$

ex quibus ſi ſinus et coſinus arcus $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$ eliminentur, prodit iſta aequatio $xx+yy = \frac{n^4ss+nnss}{(1+nn)^2} = \frac{nnss}{1+nn}$, in qua $xx+yy$ exhibet quadratum chordae arcum s ſubtendentis; vnde curua quaeſita hanc habet proprietatem, vt omnes arcus ab initio A ſumti ad ſuas chordas datam teneant rationem, ex qua iam ſponte ſequitur curuam eſſe ſpiralem logarithmicam.

§. 13. Quoniam vero iam ſupra erat $dx = ds$ ſin. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$ et $dy = ds$ coſ. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$, erit ſin. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} = \frac{dx}{ds}$ et coſ. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} = \frac{dy}{ds}$, ex quibus valoribus in aequationibus integratis ſubſtitutis emergent ſequentes aequationes:
$x\,ds = \frac{nns\,dx - ns\,dy}{1+nn}$ et $y\,ds = \frac{nns\,dy + ns\,dx}{nn+1}$ quarum illa per hanc diuiſa praebet iſtam $\frac{x}{y} = \frac{n\,dx - dy}{n\,dy + dx}$ ſeu $nx\,dy + x\,dx = ny\,dx - y\,dy$ quae

quae adeo inter ſolas coordinatas, x et y continetur. Cum igitur ſit $n(y\,dx - x\,dy) = x\,dx + y\,dy$, diuidatur per $xx + yy$, quo facto integrale aequationis erit n A tang. $\frac{x}{y} = l\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{a}$: ex qua admodum breuis et facilis conſtructio curuae quaeſitae conſequitur ope logarithmicae et circuli, quae eadem autem mox alia via eruetur. Interim ex hac conſtructione natura curuae quaeſitae, qua ea eſt ſpiralis logarithmica, non difficulter colligitur.

§. 14. Quodſi autem aequationem $xx + yy = \frac{nnss}{1+nn}$ euoluere velimus, facile intelligitur id commodiſſime fieri per relationem diſtantiae cuiusque puncti M a puncto fixo A ad perpendiculum quod ex A in tangentem in M demittitur. Sit igitur AM curua quaeſita, et ducta AM $= \sqrt{(xx+yy)} = z$, demittatur ex A in tangentem MT perpendiculum AT, ſitque AT $= p$ et MT $= t = \sqrt{(zz-pp)}$ erit ob triangula Mmn, MAT ſimilia, et $mn = dz$, elementum arcus M$m = ds = \frac{z\,dz}{t}$. At aequatio inuenta praebet $ss = \frac{(1+nn)zz}{nn}$ et $s = \frac{z}{n}\sqrt{(1+nn)}$ hincque $ds = \frac{dz}{n}\sqrt{(1+nn)}$ $= \frac{z\,dz}{t}$ vbi, cum commode accidat vt per dz diuidi queat aequatio, habetur ſtatim aequatio in terminis finitis $t\sqrt{(1+nn)} = nz$ ſeu $\frac{t}{z} = \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}$ et $\frac{p}{z} = \frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}$. Cognoſcitur igitur angulum TMA, quem curuae tangens cum recta AM conſtituit vbique eſſe eundem ideoquae conſtantem, quo ipſo logarithmica ſpiralis ſolet definiri: anguli vero huius conſtantis AMT tangens eſt $= \frac{p}{t} = \frac{1}{n}$. fig. 5.

§. 15. Quodſi ad curuam conſtruendam centro A deſcribamus circulum arbitrarii radii AF $= 1$ arcumque a puncto fixo F ſumtum, FS ponamus $= q$; erit ob S$s = dq$, M$n = z\,dq$, et $dz : z\,dq = t : p = n : 1$: vnde obtinetur dz

 $= n$

$= nzdq$ et $ndq = \frac{dz}{z}$, quae integrata dat $nq = l\frac{z}{a}$ ex qua aequatione intelligitur, quanta ſit recta AM, quae per quodque punctum S traducitur, haecque ſimul eſt conſtructio, quae ex aequatione integrali §. 13. data conſequitur: arcus ſcilicet circuli FS exprimunt logarithmos radiorum AM, hancque ob cauſam iſta curua vocata eſt logarithmica ſpiralis.

Fig. 2. §. 16. Progrediamur ad problema ſecundum, quod ita ſe habet:

Inuenire curuam AMB *quae ſuae euolutae bma inuerſe ſit ſimilis.*

Ad curuam AB ducatur primum is radius oſculi Ee, qui euolutam in puncto e homologo ipſi E tangat, ſitque hic radius oſculi E$e = a$; a puncto nunc hoc E computetur arcus EM $= s$, et ponatur radius oſculi M$m = r$, qui euolutam tanget in m, eritque arcus $em = r - a$. Iam in euoluta ſumatur punctum μ homologum puncto M, poſitaque ratione ſimilitudinis curuae quaeſitae ad ſuam euolutam $= 1 : n$, erit arcus $e\mu = ns$ et radius oſculi in $\mu = nr$. Nunc ex μ ducatur tangens μR quae ſimul erit radius oſculi curuae AMB in R, puncto ipſi m homologo. Ponatur arcus ER $=$ S et radius oſculi R$\mu =$ R, erit $e\mu = a -$ R; atque $em = n$S et radius oſculi in $m = n$R.

§. 17. Hinc itaque obtinentur ſequentes aequationes; prima ſcilicet $em = r - a = n$S, ſecunda $e\mu = a - R = ns$, ex quibus elicitur S$= \frac{r-a}{n}$, et R$= a - n$S. At quia arcus EM et ER ſunt aeque ampli, erit $\frac{dS}{R} = \frac{dr}{na - nns} = \frac{ds}{r}$, hincque $rds = nads - nnsds$ et integrando $rr = 2nas - nnss + aa$ eiusmodi addita conſtante vt poſito $s = 0$ fiat $r = a$.

$r = a$, vti aſſumſimus. Ponamus autem ns loco $ns - a$, ſeu initium, a quo arcus menſuramus, mutemus in alium locum B exiſtente $BE = \frac{a}{n}$, quo pacto natura curuae *nil* mutatur, habebimus $rr = 2aa - nnss$, et $r = \sqrt{(2aa - nnss)}$. Ex qua aequatione ſi curua fuerit determinata, punctum E circa quod arcus aeque ampli ſunt abſcindendi, vt prodeat curua ſuae euolutae inuerſe ſimilis, ibi eſt ſumendum vbi ſit radius oſculi $r = a$: id quod eueniet ſi ab initio nunc capto abſcindamus arcum $s = \frac{a}{n}$.

§. 18. Quaeramus aequationem inter coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$, ſitque $dx = pds$ et $dy = ds \sqrt{(1 - pp)}$ erit radius oſculi in M, ſcilicet $r = \frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp}$, vnde obtinetur iſta aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ quae integrata dat A ſin. $p = \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{1}{n}$ A ſin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$, ſi quidem axem AP in A ad curuam normalem ponimus. Niſi autem ſit $n = 1$, quo caſu euoluta curuae quaeſitae non ſolum ſit ſimilis ſed etiam aequalis, praeſtabit formam $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ retinere, ne calculus multiplicatione arcuum implicetur. Si enim expreſſionem $\frac{1}{n}$ A. ſin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ ſumeremus, foret $p =$ ſin. A. $\frac{1}{n}$ A ſin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ quae expreſſio, niſi $\frac{1}{n}$ ſit numerus integer ad computum accommodate exhiberi non poteſt. Fig. 4.

§. 19. Euoluamus igitur primum caſum quo $n = 1$ ſeu curuam quaeramus, quae ſuae euolutae primae inuerſe ſimilis ſit et aequalis: erit igitur pro hac curua A ſin. $p =$ A ſin. $\frac{s}{a\sqrt{2}}$ ſeu $p = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ et $\sqrt{(1 - pp)} = \frac{\sqrt{(2aa-ss)}}{a\sqrt{2}}$. Hinc itaque obtinetur $dx = pds = \frac{sds}{a\sqrt{2}}$ atque integrando $2ax\sqrt{2} = ss$, quae aequatio indicat curuam quaeſitam eſſe cycloidem vulgarem, minimam curuedinem in puncto A et rectam AP pro dia-

metro habentem. Punctum vero E in curua hac, vbi radius oſculi $= a$ reſpondet abſciſſae $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, quod punctum in centrum circuli generatoris incidit; eſt enim diameter circuli generatoris $= \frac{a}{\sqrt{2}}$. Satisfacit igitur cyclois ordinaria huic quaeſtioni eo quidem modo, qui iam pridem conſtat, atque inter praecipuas cycloidis proprietates referri ſolet.

§. 20. Ad curuas iam definiendas quae ſuis euolutis primis inuerſo modo ſint ſaltem ſimiles, vtamur hac aequatione $p =$ ſin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa + 1^2 ss)}}$, ex qua fluit iſta $\sqrt{(1 - pp)} =$ coſ. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$. Erit itaque $dx = ds$ ſin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ et $dy = ds$ coſ. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ quarum aequationum integralia per lemma §. 10. datum reperiuntur $x = \frac{nns}{nn - 1}$ ſin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2a^2 - n^2 s^2)}} + \frac{\sqrt{(2a^2 - n^2 ss)}}{nn - 1}$ coſ. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ et $y = \frac{nns}{nn - 1}$ coſ. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}} - \frac{\sqrt{(2aa - n^2 ss)}}{nn - 1}$ ſin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$. Cum igitur ſit $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}} = \frac{1}{n}$ A. ſin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$, intelligitur quoties fuerit n numerus rationalis, ſolo excepto caſu $n = 1$, valores coordinatarum x et y algebraice per s poſſe exhiberi, indeque curuam quaeſitam eſſe algebraicam.

§. 21. Si vtriusque expreſſionis quadrata inuicem addantur, prodibit haec aequatio $xx + yy = \frac{n^4 ss + 2aa - nnss}{(nn - 1)^2}$: ex qua commode elicitur aequatio inter diſtantias cuiusuis

Fig. 6. puncti M a centro fixo C et perpendiculum CT, quod ex C in tangentem in M demittitur. Poſito enim CM $= \sqrt{(xx + yy)} = z$, CT $= p$ et MT $= t = \sqrt{(zz - pp)}$ erit $ds = \frac{zdz}{t}$. Natura autem curuae exprimitur hac aequatione $zz = \frac{2aa}{(nn - 1)^2} + \frac{nnss}{nn - 1}$, quae praebet $s = \frac{1}{n} \sqrt{}$

$((nn$

$((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1})$ et $ds = \frac{(nn-1)zdz}{n\sqrt{((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1})}} = \frac{zdz}{t} = \frac{zdz}{\sqrt{(zz-pp)}}$ quae diuiſa per zdz et quadrata, ſuppeditat hanc $(nn-1)^2 zz-(nn-1)^2 pp = nn(nn-1)zz-\frac{2nnaa}{nn-1}$ ſeu $p = \sqrt{(\frac{2nnaa}{(nn-1)^3}-\frac{zz}{nn-1})}$ et $t = n\sqrt{(\frac{zz}{nn-1}-\frac{2aa}{(nn-1)^3})}$ Ducto autem ad M radio oſculi $MR = r$, ob $ns = \sqrt{((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1})}$, erit $r = (nn-1)p$, et $s = \frac{(nn-1)t}{nn}$

§. 22. Initium ergo curuae, a quo arcus aeſtimantur incidit in punctum B, vbi recta CB ad curuam eſt normalis ſeu $t = 0$, eritque recta $BC = \frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$. Hoc igitur puncto B notato erit quiuis arcus $BM = s = \frac{(nn-1)t}{nn}$ ſeu erit $BM : MT = nn-1 : nn$; et cum ſit radius oſculi $MR = r = (nn-1)p$, erit $MR : CT = nn-1 : 1$. Radius oſculi itaque euaneſcet in puncto A, cuius tangens per C tranſit, eritque $AC = \frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$. Deſcribatur centro C radio $AC = \frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$ circulus, et ponatur breuitatis gratia $\frac{na\sqrt{2}}{nn-1} = c$, ſeu $a = \frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$, erit $BD = c - \frac{c}{n} = \frac{(n-1)c}{n}$ ergo $CD : BD = n : n-1$. Porro in radium oſculi productum demittatur perpendiculum $CQ = t = n\sqrt{(\frac{zz}{nn-1} - \frac{2aa}{(nn-1)^3})}$ erit ducto radio CN ſpatium $NQ = n\sqrt{(\frac{2nnaa}{(nn-1)^3} - \frac{zz}{nn-1})} = np = n \,.\, MQ$ hincque $MN = (n-1)p$. Quare cum ſit $MR = r = (nn-1)p$, erit $MR : MN = n+1 : 1$: quia porro eſt $NQ : MN = n : n-1 = CN : VN$ fiet $VN = \frac{(n-1)c}{n} = BD$: ex quo punctum M eſt in peripheria circuli tangentis circulum AD in N, cuius diameter eſt $NV = BD$.

§. 23. Ex his ergo proprietatibus manifeſto conſequitur curuam inuentam eſſe hypocycloidem ABa, genitam reuolutione circuli diametrum habentis $BD = \frac{(n-1)c}{n} = \frac{a\sqrt{2}}{n+1}$, ſuper concauitate circuli maioris AD ſemidiametrum habentis $CD = c = \frac{(na\sqrt{2})}{nn-1}$; ſi quidem fuerit numerus n vnitate maior. At ſi n fuerit vnitate minor, curua ſatisfaciens erit Epicyclois ob valorem ipſius $BD = \frac{(n-1)c}{n}$ negatiuum, quae generetur reuolutione circuli ſuper parte conuexa circuli ADC, exiſtente ratione diametri circuli reuoluentis ad ſemidiametrum circuli quieſcentis vt $1-n$ ad n: ex quo ſimul intelligitur; quoties fuerit n numerus rationalis vnitate excepta, curuam ſatisfacientem eſſe algebraicam.

§. 24. Pro hypocycloide igitur ſeu caſu, quo $n > 1$, poſitis abſciſſa $CP = x$, applicata $PM = y$, et arcu $BM = s$ habetur iſta aequatio $xx + yy = \frac{2aa}{(nn-1)^2} + \frac{nnss}{nn-1}$. At ſi ponatur abſciſſa $BP = u$, erit $x = u + \frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$, atque inter u, y et s haec habebitur aequatio $yy + uu + \frac{2au\sqrt{2}}{nn-1} = \frac{nnss}{nn-1}$ ſeu $nnss = 2au\sqrt{2} + (nn-1)(uu+yy)$, ex qua ſponte patet, caſu $n = 1$ prodire cycloidem ordinariam, fit enim $ss = 2au\sqrt{2}$. Quodſi autem ſemidiameter circuli quiescentis CD ponatur $= c$, et diameter circuli voluti $BD = b$, erit $a = \frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$ et $b = \frac{(n-1)c}{n}$ erit $n = \frac{c}{c-b}$ et $a = \frac{2bc-bb}{(c-b)\sqrt{2}}$; vnde pro hypocycloide ABa haec oritur aequatio $ss = \frac{2b(c-b)(2c-b)u}{cc} + \frac{b(2c-b)(uu+yy)}{cc}$. Pro epycycloide vero ex iisdem circulis nata fit u negatiuum, atque iſta habebitur aequatio $ss = \frac{2b(c+b)(2c+b)u}{cc} - \frac{b(2c+b)(uu+yy)}{cc}$.

§. 25.

§. 25. Vt autem aequationem inter coordinatas CP $= x$ et PM $= y$ obtineamus differentialem, ſaltem in qua non inſit arcus s, ea ex aequationibus §. 20. datis eruetur: cum enim ſit ſin. A $.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{dx}{ds}$ et coſ. A $.\int\frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{dy}{ds}$, erit $xds = \frac{nnsdx + dy\sqrt{(2aa-nnss)}}{nn-1}$ et $yds = \frac{nnsdy - dx\sqrt{(2aa-nnss)}}{nn-1}$ ex quibus eliminato arcu s, reſultat ſequens aequatio differentialis $\frac{2nnaads^2}{(nn-1)^2} = ccds^2 = nn(xdy - ydx)^2 + (xdx + ydy)^2 = ccdx^2 + ccdy^2$ inter x et y tantum. Ad quam aequationem tractandam ponamus $\frac{y}{x} = v$ et $\sqrt{(xx+yy)} = z$, ſeu $x = \frac{z}{\sqrt{(1+v^2)}}$ et $y = \frac{vz}{\sqrt{(1+vv)}}$ erit $ds^2 = dz^2 + \frac{z^2dv^2}{(1+vv)^2}$; hisque ſubſtitutionibus factis peruenitur ad hanc aequationem $c^2dz^2 + \frac{ccz^2dv^2}{(1+vv)^2} = \frac{nnz^4dv^2}{(1+vv)^2} + zzdz^2$, quae porro reducitur ad hanc: $\frac{dv}{1+vv} = \frac{dz\sqrt{(cc-zz)}}{z\sqrt{(nnzz-cc)}}$. Ponatur porro $\frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{\sqrt{(cc-zz)}} = t$, ſeu $z = \frac{c\sqrt{(1+tt)}}{\sqrt{(nn+tt)}}$ fiet $\frac{dv}{1+vv} = \frac{dt}{1+tt} - \frac{dt}{nn+tt}$: atque integrando A tang $v =$ A tang. $t - \frac{1}{n}$ A tang $\frac{t}{n}$ ſeu n A tang. $\frac{t-v}{1+tv} =$ A tang. $\frac{t}{n}$; quae reſtitutis prioribus valoribus transmutatur in hanc n A tang. $\frac{x\sqrt{(nnzz-cc)} - y\sqrt{(cc-zz)}}{x\sqrt{(cc-zz)} + y\sqrt{(nnzz-cc)}} =$ A tang. $\frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{n\sqrt{(cc-cc)}}$ quae quoties n eſt numerus rationalis, fit algebraica. Cum autem his expreſſionibus ad figuram relatis ſit $p = \frac{\sqrt{(cc-zz)}}{\sqrt{(nn-1)}}$ et CQ $=$ MT $= t = \frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{\sqrt{(nn-1)}}$, itemque NQ $= \frac{n\sqrt{(cc-zz)}}{\sqrt{(nn-1)}}$, erit n A tang. $\frac{tx-py}{px+ty} =$ A tang. $\frac{t}{NQ}$ indeque n ang. BCT $=$ ang. TCV; ex quo erit ang. TCV : ang. TCB $= n : 1$ ſeu ang. TCV : ang. BCV $= n : n-1 =$ CD : BD. atque hinc quoque oritur BC : BD $=$ ang. BCT : ang. BCV $=$ arc. DX : DN. quae omnia cum receptis epicycloidum et hypocycloidum proprietatibus apprime conueniunt.

§. 26. Sic itaque definitae ſunt omnes curuae, quae ſuis euolutis primis tam directe quam inuerſe ſint ſimiles, priori ſcilicet caſu ſatisfaciunt omnes ſpirales logarithmicae, poſteriori vero omnis generis cycloides, quae communiter tam epicycloidum quam hypocycloidum nomine comprehendi ſolent. Manifeſtum autem eſt has easdem curuas omnibus quaeſtionibus ſequentibus ſatisfacere debere, quibus quaeruntur curuae, quae ſint ſimiles ſuis euolutis altioris cuiusdam gradus, ſiue directe ſiue inuerſe. Logarithmicae enim ſpirales ſuis euolutis cuiuscunque ordinis directe ſunt ſimiles, quia omnes euolutae manent logarithmicae ſpirales. Deinde omnes cycloides, quae ſuis evolutis primis inuerſe ſimiles eſſe repertae ſunt, ſuis euolutis ſecundis, quartis, ſextis omnibusque ordine paribus directe erunt ſimiles: euolutis vero tertiis, quintis, ſeptimis omnibusque ordine imparibus ſimiles erunt inuerſe. His vero iisdem quaeſtionibus innumerabiles aliae ſatisfacient curuae, eoque plures, quo ad vlteriores ordines procedatur: quarum curvarum ſatisfacientium vt plures ſpecies detegamus, quaeſtionem noſtram ad euolutas ſecundas accommodatam pertractabimus.

§. 27. Ad curuas igitur inueſtigandas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſecundis, quaeſtio pro ſimilitudine directa et inuerſa bipartienda eſt: vnde primum hoc nobis problema erit reſoluendum.

Fig. 7. *Inuenire curuas quae ſuis euolutis ſecundis directe ſint ſimiles.*

Sit AM eiusmodi curua, quae problemati ſatisfaciat, cuius initium ſumatur in puncto A, a quo verſus M recedendo radii oſculi creſcant. Sit igitur BN huius curuae euoluta,

luta, quae vel ita erit comparata, vt ab B ad N radii oſculi creſcant, ſicuti figura repraeſentat, vel decreſcant, ex quo huius problematis duplex naſcitur ſolutio. Ad priorem igitur, cui figura eſt accommodata, abſoluendam ponatur curuae quaeſitae AM arcus $AM = s$, radius oſculi $MN = r$; erit eius euolutae BN arcus $BN = r - a$; radius oſculi $Nm = \frac{rdr}{ds}$; atque euolutae ſecundae arcus $am = \frac{rdr}{ds} - b$; eiusque in m radius oſculi $= \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$.

§. 28. Cum igitur curua am ſimilis eſſe debeat directe curuae AM, erit eius arcus $am = ns$, et radius oſculi $= nr$, vnde duplex naſcitur aequatio $\frac{rdr}{ds} - b = ns$ et $nr = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$, quarum vtraque eodem redit. Sumamus itaque aequationem $\frac{rdr}{ds} = ns + b$, quae ob initium A arbitrarium tranſit in hanc $\frac{rdr}{ds} = ns$, quae integrata dat $rr = nss + aa$, ita vt curuae quaeſitae AM radius oſculi in initio A ſit $= a$: circa hocque punctum A curva vtrinque habebit arcus ſimiles et aequales. Ceterum apparet, ſi fiat $a = 0$, tum prodire aequationem pro ſpirali logarithmica, quam huic caſui ſatis facere perſpicuum eſt. Praeterea etiam hoc notari oportet in aequatione $rr = nss + aa$ conſtantem aa, quae per integrationem eſt inducta negatiue nullo pacto accipi poſſe, ne radius oſculi r vsquam fiat imaginarius: omnis enim aequatio, quae inter arcum et radium oſculi exhibetur, ita debet eſſe comparata, vt cuique arcui radius oſculi realis reſpondeat, niſi forte curua alicubi in puncto quodam terminetur ſeu retrogrediatur, tum enim ſi curuae vltra id punctum conſtans longitudo addita concipiatur, per id interuallum radius oſculi debet eſſe imaginarius.

fig. 4. §. 29. Quoniam itaque habemus hanc aequationem $rr = nss + aa$, erit $r = \sqrt{(aa + nss)}$. Conſideremus nunc curuam quaeſitam ad axem AP relatam, ſitque abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$, et ponatur $dx = pds$ et $dy = ds\sqrt{(1-pp)}$ erit radius oſculi $r = \frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp} = \sqrt{(aa + nss)}$: hincque $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(nss+aa)}}$. Quodſi autem huius curuae euolutae primae arcus ponatur $= S$ et radius oſculi $= R$, erit $S = r$, et $R = \frac{rdr}{ds} = ns$ ex quo pro euoluta prima iſta emergit aequatio $RR = nSS - naa$, quae ergo curua in puncto quopiam terminabitur, vltra quod curuae adiecta eſt longitudo $= a$. Quare ſi in aequatione pro curua quaeſita ponamus $-naa$ loco aa ſimul prodibit aequatio pro euoluta prima, quae adeo pariter problemati ſatisfaciet, ſuamque euolutam ſecundam ſibi directe habebit ſimilem.

§. 30. Cum itaque problemati ſatisfaciat aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(nss+aa)}}$, in eaque loco aa quantitatem tam affirmatiuam quam negatiuam accipere liceat, ponamus ab loco aa, ne forma quadrati ſolum ſignum affirmatiuum inuoluere videatur: hincque erit A ſin. $p = \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ et $p = \text{ſin. A} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ atque $\sqrt{(1-pp)} = \text{coſ. A.} \int \frac{ds}{(\sqrt{nss+ab})}$. Quae aequationes ſi multiplicentur per ds, obtinebitur $dx = ds \,\text{ſin. A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ et $dy = ds \,\text{coſ. A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$, quae per lemma §. 10. datum ita integrabuntur, vt ſit $x = \frac{ns}{1+n}$ ſin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} \frac{-\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$ coſ. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ atque $y = \frac{ns}{1+n}$ coſ A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} + \frac{\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$ ſin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$.

§. 31. Quoniam autem ex aequationibus differentialibus eſt ſin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} = \frac{dx}{ds}$ atque coſ. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} = \frac{dy}{ds}$, prodibit his valoribus in aequationibus integratis ſubſti-

ſubſtituendis $xds = \frac{nsdx - dy\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$ et $yds = \frac{nsdy + dx\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$: ex quibus ſi arcus s eliminetur, ſequens inter ſolas coordinatas x et y naſcitur aequatio $\frac{nabds^2}{(1+n)^2} = n(ydx - xdy)^2 - (xdx + ydy)^2$, quae quomodo ad ſeparationem atque conſtructionem ſit perducenda ex §. 25. intelligi poteſt. Conſtructio ſcilicet commodius deducetur ex aequatione inter diſtantias ſingulorum curuae punctorum a dato puncto fixo ceu centro et perpendicula in tangentes: eiusmodi autem aequatio deriuabitur facillime ſumendis quadratis coordinatarum x et y, tum enim prodibit iſta aequatio $xx + yy = \frac{ab}{(1+n)^2} + \frac{nss}{1+n}$. ſeu $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$. Pro huius vero curuae euoluta prima aequatio ſimili modo accepta erit $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} + \frac{ab}{1+n}\right)}$ pro euoluta ſecunda haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n\,(xx+yy}{n} - \frac{nab}{1+n}\right)}$ pro euoluta tertia $s = \sqrt{\left(\frac{(1+r)(xx+yy)}{n} + \frac{n^2ab}{1+n}\right)}$ etc. ex quo ſi habeatur pro prima curua aequatio vel conſtructio, eadem totius ſeriei euolutarum naturam in ſe complectetur: quarum ſingulae problemati aeque ac ipſa prima ſatisfaciet.

§. 32. Referatur itaque curua ad centrum fixum A, in quo ante axis AP terminabatur, ponaturque recta AM $= \sqrt{(xx+yy)} = z$, perpendiculum in tangentem, AT $= p$ ipſaque tangens MT $= \sqrt{(zz-pp)} = t$, erit elementum curuae $ds = \frac{zdz}{t}$. At ex praecedente aequatione pro curua noſtra inuenta emergit haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)zz}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$, vnde fit $ds = \frac{(1+n)zdz}{\sqrt{\left(n(1+n)zz - \frac{nab}{1+n}\right)}} = \frac{zdz}{t}$: quae cum per zdz diuidi queat, erit $t = \sqrt{\left(\frac{nzz}{1+n} - \frac{nab}{(1+n)^2}\right)} = \frac{s}{1+n}$ Fig. 5.

$\frac{s}{1+n}$; et $p = \sqrt{(\frac{zz}{1+n} + \frac{nab}{(1+n)^3})}$. Radius osculi vero r, qui eſt $= \sqrt{(nss + ab)}$, erit $= \sqrt{((1+n)zz + \frac{nab}{1+n})}$ ex quo erit $r = (1+n)p$ et $s = (1+n)t$, quae ſunt proprietates notatu dignae pro curua quaeſita.

§. 33. Ad figuram curuae inueſtigandam habeat primum conſtans ab valorem affirmatiuum ſitque $\frac{ab}{(1+n)^2} = cc$, erit $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zz - cc)}$ et $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz + ncc)}$: vnde perſpicitur z neceſſario maiorem eſſe debere quam c. Caſu autem quo $z = c$ fit $t = 0$, et $p = c$; quare hoc
Tab. I. fig. 8. loco ipſa recta A M in curuam erit normalis. Deſcribatur igitur centro C radio CA $= c$ circulus AS, ſitque curuae quaeſitae initium in A, vbi curua ad radium CA erit normalis, ibique radium osculi habebit $= (1+n)$ CA. Iam ſumatur curuae punctum quodcunque M, poſitaque vt ante CM $= z$, CT $= p$ et MT $= t$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz + ncc)}$ et $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zz - cc)}$, et anguli CMT tangens $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zz + ncc}{nzz - ncc}}$; quare creſcente diſtantia z, hic angulus continuo decreſcet, donec tandem, quando fit $z = \infty$, huius anguli tangens fiat $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, vbi curua cum logarithmica ſpirali confundetur.

§. 34. Vt vero curuae huius commodam conſtructionem tradamus, ponatur arcus circularis A S $= q$, cuius elementum S s erit $= dq$, vnde fiet M $n = \frac{zdq}{c}$, atque $t:p = dz:\frac{zdq}{c}$, ex quo oritur $dq = \frac{cpdz}{zt} = \frac{cdz}{z}\sqrt{\frac{zz+ncc}{nzz-ncc}}$ Ponatur $\sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}} = u$ erit $zz = \frac{nncc(1+uu)}{n-uu}$ et $\frac{dz}{z} = \frac{udu}{1+uu} + \frac{udu}{n-uu}$, hincque $\frac{dq}{c} = \frac{du}{1+uu} + \frac{du}{n-uu}$, cuius integrale eſt $\frac{q}{c} = $ A tang. $u + \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}-u} =$ A tang. $\sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{(zz+ncc)}+\sqrt{(zz-cc)}}{\sqrt{(zz+ncc)}-\sqrt{(zz-cc)}}$ Sumta igitur prolubitu

diſtantia

diſtantia z eius poſitio reſpectu C A ita definietur. Dabitur primo triangulum M C T, cuius anguli M C T tangens erit $= \sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}}$. Deinde hoc triangulum circa C ita erit diſponendum, vt angulus A C T fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{(zz+ncc)}+\sqrt{(zz-cc)}}{\sqrt{(zz+ncc)}-\sqrt{(zz-cc)}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{p\sqrt{n}+t}{p\sqrt{n}-t}$. Quodſi ergo fiat $z = \infty$, arcus A S infinite magnus euadet, ac propterea curva A M O infinitis ſpiris circa C peragendis in infinitum excurret: ac recta A C erit huius curuae diameter.

§. 35. Sit nunc $a b$ quantitas negatiua, et ponatur $\frac{-nab}{(1+n)^2} = cc$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz-cc)}$ et $t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz+cc)}$ vnde perſpicuum eſt z non poſſe eſſe $< c$: caſu autem quo $z = c$, fit $p = 0$ et $t = c$; ex quo tangens curuae hoc loco per ipſum centrum tranſibit. Deſcribatur igitur centro C radio C A $= c$ circulus, ſitque A M O curua Tab. II. Fig. I.
quaeſita, quae in A circulo normaliter inſiſtat, ita vt recta A C ſit tangens huius curuae in A. Sumto ergo puncto quocunque M, et ex C in tangentem M T demiſſo perpendiculo C T, erit C M $= z$. C T $= p$ et M T $= t$, atque anguli C M T tangens erit $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}}$ Quare diſtantia z in infinitum creſcente fiet anguli C M T tangens $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, ibique curua cum logarithmica ſpirali confundetur.

§. 36. Conſtructio huius curuae ſimili modo perficietur, quo caſu praecedente; poſito enim arcu circulari A S $= q$, erit $t : p = d z : \frac{zdq}{c}$, vnde fit $d q = \frac{cpdz}{tz} = \frac{cdz}{z}\sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}}$. Facta nunc ſimili ſubſtitutione prodibit ſequens aequatio integralis $\frac{q}{c} = \text{A tang.} \sqrt{\frac{nzz+cc}{zz-cc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\, l\, \frac{\sqrt{n(zz-cc)}+\sqrt{(nzz+cc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{n(zz-cc)}} - \text{A tang.} \infty$; quae reducitur ad hanc

$\frac{q}{c} +$

$\frac{q}{c} + A \text{ tang. } \sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{(nzz+cc)}+\sqrt{(nzz-ncc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{(nzz-ncc)}}$. Quod ſi ergo longitudo MC pro lubitu accipiatur, ſuper ea formetur triangulum rectangulum CPM, ita vt ſit $CP = t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz+cc)}$ *et* $PM = p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz-cc)}$ quo facto hoc triangulum in talem ſitum collocetur vt angulus ACP fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{(nzz+cc)}+\sqrt{(nzz-ncc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{(nzz-ncc)}}$.

Tab. II. fig. 2. §. 37. Cum igitur his duobus caſibus ſolutionis problematis pars prior abſoluatur, accedamus ad alteram partem, in qua euolutae primae BN radii oſculi a B ad N pergendo decreſcunt. Quare ſi in curua quaeſita ponatur arcus $AM = s$, radius osculi $MN = r$, erit euolutae primae BN arcus $BN = r - a$, radius oſculi $Nm = \frac{rdr}{ds}$ hincque pro euoluta ſecunda arcus $am = b - \frac{rdr}{ds} = ns$; et radius osculi $mn = -\frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds} = ns$. Ex vtraque aequatione mutato initio A reſultat iſta $nsds + rdr = 0$, quae integrata dat $nss + rr = aa$ ſeu $r = \sqrt{(aa - ns)}$, quae cum omnino ſimilis ſit illi quae ſupra §. 17. eſt inuenta, huic caſui ſatisfacient epicycloides et hypocycloides omnes. Curuarum itaque, quae ſuis euolutis ſecundis directe ſunt ſimiles quinque nacti ſumus genera; quorum primum omnes ſpirales logarithmicas complectitur, tum ſequentur bina ſpiralium genera noua §. §. 33, 35. expoſita; reliqua bina genera conſtituunt epicycloides et hypocycloides.

§. 38. Circa ſimilitudinem euolutarum ſecundarum reſtat hoc problema.

Tab. II. fig. 3. *Inuenire curuas, quae ſuis euolutis ſecundis inuerſe ſint ſimiles.*

Huius

Huius problematis pariter ac praecedentis duplex requiritur ſolutio, prout euolutae primae radii oſculi ab H pergendo vel creſcunt vel decreſcunt, ſi quidem in curua quaeſita AEB curuedo ab A ad B decreſcat. Ponamus igitur euolutae primae radios osculi ab H ad N creſcere, ſitque E id punctum in curua quaeſita ita comparatum vt portionis EB euoluta ſecunda ac ſimilis ſit portioni AE, huiusque euoluta ſecunda *be* ſimilis illi portioni BE, prouti ſimilitudo inuerſa poſtulat. Circa E ſumantur vtrinque arcus EM et EQ aeque ampli, atque euolutis prima HN et ſecunda *ba* deſcriptis, debebit arcus *em* ſimilis eſſe arcui EM, et arcus *eq* ipſi EQ.

§. 39. Vocetur radius osculi $EF = a$, et $Fe = b$, atque ponantur arcus $EM = s$; $EQ = S$; itemque radii osculi $MN = r$ et $QR = R$, habebitur ob arcus aeque amplos $\frac{ds}{r} = \frac{dS}{R}$. Iam itaque in euoluta ſecunda erit propter ſimilitudinem $em = ns$, $eq = nS$, radius osculi in $m = nr$, et radius osculi in $q = nR$. At ex natura euolutionis habebitur $FN = r - a$; $FR = a - R : Nq = \frac{rdr}{ds}$; et $Rm = \frac{-RdR}{ds} = \frac{-rdR}{ds}$ Denique in euoluta ſecunda erit $eq = \frac{rdr}{ds} - b$; et $em = b + \frac{rdR}{ds}$: atque radius oſculi in $q = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$, ac radius osculi in $m = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$. His cum expreſſionibus ex ſimilitudine natis coniungendis orientur hae aequationes $ns = b + \frac{rdR}{ds}$; $nS = \frac{rdr}{ds} - b$; $nr = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$; $nR = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$ quae binae poſteriores aequationes in prioribus continentur ob aequationem fundamentalem $\frac{dS}{R} = \frac{ds}{r}$.

§. 40. Habemus itaque tres iſtas aequationes

I. $rdS = Rds$

II. $nsds = rdR + bds$

III. $nSds = rdr - bds$

ex quibus curuae conſtructio debet formari: quae ita abſoluetur, vt binae variabiles S et R eliminentur, atque aequatio eruatur inter s et r; haec enim ſi ita fuerit comparata, vt ad datum arcum s quantitas radii oſculi r poſſit aſſignari, ſimul ipſa curua poterit conſtrui, quemadmodum alibi oſtendi. Eſt vero ex tertia aequatione $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, atque ex prima $R = \frac{rdS}{ds} = \frac{r}{nds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$, qui in ſecunda ſubſtitutus dat hanc $\frac{(ns-b)ds}{r} = \frac{1}{n}\, d.\, \frac{r}{ds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$: haec vero aequatio euoluta ad differentialia tertii gradus exſurgit, quae vix vllo modo deprimi atque ad conſtructionem accommodari queat. Ipſa quidem aequatio haec mutato initio E ſeu ſcripto ns loco $ns-b$ ita ſe habebit: $n^2 s ds^3 = r^3 d^3 r + 4r^2 dr ddr + r dr^3$; poſito ds conſtante, haec vero commode integrabilis exiſtit, eſt namque integralis $n^2 s^2 ds^2 + C ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$.

§. 41. Quantumuis autem difficilis huius aequationis differentio-differentialis conſtructio videatur, tamen ea ex aequationibus primitiuis deduci poteſt. Secunda ſcilicet aequatio per primam abit in hanc

$$n s dS = R dR + b dS$$

ad quam ſi tertia addatur, obtinebitur iſta:

$n s dS + n S ds = R dR + r dr + b dS - b ds$, cuius integralis eſt $2nSs = R^2 + r^2 + 2bS - 2bs - 2aa$ eiusmodi adhibita conſtante, vt euaneſcentibus arcubus s et S radii oſculi R et r fiant $= a$. Simili modo ſi ad tertiam aequationem per primam in hanc transformatam:

$n S dS = R dr - b dS$ addatur ſecunda, prodit $n s ds + n S dS = r dR + R dr + b ds - b dS$, cuius integralis eſt $ns^2 + nS^2 = 2Rr + 2bs - 2bS - 2aa$. Hinc itaque emergunt binae ſequentes aequationes:

$R^2 +$

$R^2 + r^2 = 2aa + 2bs - 2bS + 2nSs$; et
$2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$
ex quibus additis et ſubtractis obtinetur
$(r+R)^2 = 4aa + n(s+S)^2$ atque
$(r-R)^2 = 4b(s-S) - n(s-S)^2$

§ 42. Ex his duabus aequationibus ſi eliminetur R, obtinebitur aequatio algebraica inter S, s et r in qua ſi porro loco S ſubſtituatur eius valor $\frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, habebitur aequatio differentialis primi gradus inter r et s quae propterea erit integralis illius aequationis differentialis ſecundi gradus ſupra inuentae

$$n^2 s^2 ds^2 + C ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$$

Haec eadem vero aequatio differentialis ſecundi gradus reſultat ſi in aequatione $2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$ loco R et S ſubſtituantur valores per r et s ſcilicet $R = \frac{r}{nds} d . \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2ddr + rdr^2}{nds^2}$ et $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$ fiet enim $\frac{2r^3ddr + 2rrdr^2}{nds^2} = 2aa - 2bs + \frac{2brdr}{nds} - \frac{2bb}{n} + \frac{r^2dr^2}{nds} - \frac{2brdr}{nds} + \frac{bb}{n} + nss$ ſeu $2r^3ddr + r^2dr^2 = (n^2s^2 - 2nbs - bb + 2naa)ds^2$. Quare ſi vt ſupra fecimus loco $ns - b$ ſcribamus ſimpliciter ns, prodibit aequatio $n^2s^2ds^2 + 2(naa - bb)ds^2 = 2r^3ddr + r^2dr^2$.

§. 43. Vt nunc huius aequationis differentialis ſecundi gradus veram aſſignemus aequationem integralem, quae erit differentialis primi gradus, ponamus etiam $s = S + \frac{b}{n}$ et $S = S - \frac{b}{n}$, erit $(r+R)^2 = 4aa + n(S+s)^2$ atque $(r-R)^2 = \frac{4bb}{n} - n(s-S)^2$ exiſtente $S = \frac{rdr}{nds}$ ſeu $R^2 + r^2 = 2aa + \frac{2bb}{n} + 2nSs$ atque $2Rr = 2aa - \frac{2bb}{n} + nS^2 + ns^2$ ex qua erit $4R^2r^2 = n^2(S^2 + s^2)^2 + 4n$

 $(a^2 -$

$(a^2 - \frac{b^2}{n})(S^2 + s^2) + 4(a^2 - \frac{b^2}{n})^2$: at ex priore aequatione eſt $4R^2 r^2 = 8(aa + \frac{bb}{n})rr + 8Ssr^2 - 4r^4$, ſcribatur f loco $aa - \frac{bb}{n}$ et g loco $aa + \frac{bb}{n}$, ac proueniet ſequens aequatio:

$r^4 dr^4 + 2n^2 s^2 r^2 ds^2 dr^2 + n^4 s^4 ds^4 + 4nfr^2 ds^2 dr^2$ $+ 4n^3 fs^2 ds^4 + 4n^2 f^2 ds^4 = 8n^2 gr^2 ds^4 - 4n^2 r^4 ds^4$ $+ 8n^2 sr^3 ds^3 dr$, quae adeo eſt integralis huius $n^2 s^2 ds^2 + 2nfds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$, id quod eo magis eſt notandum, quod nulla pateat via alteram ex altera deducendi, immediate ſcilicet. Nam ſi differentialis aequatio ſecundi gradus reſoluatur in plures aequationes per valores aſſumtitios $S = \frac{rdr}{nds}$ et $R = \frac{r^2 ddr + rdr^2}{nds^2}$, tum congruentia ſatis perſpicitur eo modo quo ſumus vſi. Atque hinc fortaſſe aliquando nouam methodum detegere licebit, ad aequationes differentiales altiorum graduum integrandas. Hic quidem ſufficiat ſpeciem quandam huius methodi indicaſſe, ex qua ipſius vſus ingens, ſi quando excoletur, perſpiciatur.

§. 44. Interim tamen iſtae aequationes ad curuam quaeſitam conſtruendam non multum iuuant, quam ob cauſam aliam viam ad conſtructionem perueniendi aperiemus. Ponamus $s + S = p$; $s - S = q$; $r + R = u$; et $r - R = v$: erit $s = \frac{p+q}{2}$; $S = \frac{p-q}{2}$; $r = \frac{u+v}{2}$ et $R = \frac{u-v}{2}$; qui valores in aequatione $rdS = Rds$ ſubſtituti dabunt $udq = vdp$; aequationes vero §. 41. inuentae abibunt in ſequentes $u^2 = 4aa + np^2$ et $v^2 = 4bq - nq^2$, ex quibus obtinebitur $\frac{dp}{\sqrt{(4aa + npp)}} = \frac{dq}{\sqrt{(4bq - nqq)}}$, in qua cum variabiles p et q ſint a ſe inuicem ſeparatae, dabitur q per p et proinde S per s; hincque porro v et u atque adeo r et R per s.

Quare

Quare cum ad datum ipſius s valorem quemuis aſſignari queat valor ipſius r, ipſa curua, in qua s arcum et r radium osculi denotat, conſtrui poterit, ex quo problema propoſitum, quantum quidem deſiderari poteſt, eſt reſolutum, cum id ſit perductum ad aequationem differentialem primi gradus, in qua variabiles p et q ſunt a ſe inuicem ſeparatae.

§. 45. Quodſi autem detur relatio inter arcum curuae cuiuspiam s ac radium oſculi r, ipſa curua ſequenti modo conſtruetur. Ponatur abſciſſa $= x$, applicata $= y$, ſitque $dx = pds$, erit $dy = ds\,\surd(1-pp)$ atque $r = \frac{ds\surd(1-pp)}{dp}$; vnde fiet $\frac{dp}{\surd(1-pp)} = \frac{ds}{r}$ et A. ſin. $p = \int\frac{ds}{r}$ quod integrale dabitur ob datam relationem inter s et r. Hanc ob rem habebitur $p =$ ſin. A. $\int\frac{ds}{r}$ atque $\surd(1-pp) =$ coſ. A. $\int\frac{ds}{r}$; hincque $dx = ds$ ſin. A. $\int\frac{ds}{r}$ et $dy = ds$ coſ. A. $\int\frac{ds}{r}$. Ex quibus tandem per integrationem prodit $x = \int ds$ ſin. A. $\int\frac{ds}{r}$ atque $y = \int ds$ coſ. A. $\int\frac{ds}{r}$; ita vt per quadraturas ad datum cuiusque arcus valorem aſſignari queant tam abſciſſa quam applicata.

§ 46. Accedamus iam ad caſum alterum problematis §. 38. propoſiti, ac decreſcant radii osculi euolutae primae HN ab H ad N pergendo. Maneant vti in praecedente caſu radii osculi fixi EF $= a$, F$e = b$, vocenturque arcus EM $= s$, EQ $=$ S et radii osculi MN $= r$, et QR $=$ R; vnde ob ſimilitudinem in euoluta ſecunda erit $em = ns$ et $eq = n$S. Per naturam vero euolutionis erit in euoluta prima FN $= r - a$; FR $= a -$ R N$q = \frac{rdr}{ds}$ et R$m = \frac{-\text{R}d\text{R}}{ds}$: ex quibus pro euoluta ſecunda oritur $em = ns = \frac{-\text{R}d\text{R}}{ds} - b$, atque $eq = n\text{S} = b - \frac{rdr}{ds}$. Tab. II. fig. 4.

$\frac{ndr}{ds}$. Ob arcus denique EM et EQ aeque amplos erit $\frac{ds}{r} = \frac{ds}{R}$. Quamobrem habebuntur tres ſequentes aequationes:

I. $rdS = Rds$.

II. $nsdS = -RdR - bdS$.

III. $nSds = -rdr + bds$.

quarum binae poſteriores ope primae transmutantur in has:

II. $nsds = -rdR - bds$

III. $nSdS = -Rdr + bdS$.

§. 47. Addamus primum binas aequationes poſteriores in forma priore, eritque ſumma:

$$nsdS + nSds = -RdR - rdr + bds - bdS$$

quae integrata dat hanc aequationem

$$2nSs = 2aa - R^2 - r^2 + 2bs - 2bS$$

ſeu $R^2 + r^2 = 2a^2 + 2b(s - S) - 2nSs$

Deinde addamus easdem aequationes in forma poſteriori, erit $nsds + nSdS = -rdR - Rdr - bds + bdS$ cuius integrale eſt $ns^2 + nS^2 = 2a^2 - 2Rr - 2b(s-S)$ ſeu $2Rr = 2a^2 - 2b(s-S) - n(s^2 + S^2)$, quae cum illa coniuncta tum addendo tum ſubtrahendo praebet

$$(r+R)^2 = 4a^2 - n(s+S)^2 \text{ atque}$$

$$(r-R)^2 = 4b(s-S) + n(s-S)^2$$

quae aequationes ab illis, quas caſu praecedente inuenimus non differunt, niſi quod n habeat valorem negatiuum.

§. 48. Quodſi ergo ad curuam conſtruendam faciamus vt ante $s + S = p$; $s - S = q$; $r + R = u$; et $r - R = v$ erit $u = \sqrt{(4aa - npp)}$ et $v = \sqrt{(4bq + nqq)}$ hincque per aequationem primam $rdS = Rds$ obtinebitur

$$\frac{dp}{\sqrt{(4aa - npp)}} = \frac{dq}{\sqrt{(4bq + nqq)}}$$

per

per quam dabitur relatio inter p et q, vnde s et r per eandem variabilem vel p vel q determinabitur; id quod ad curuam conſtruendam ſufficit.

§. 49. Vt autem naturam huius curuae propius inſpicere liceat, tentabimus ipſam conſtructionem perficere, atque aequationem inter coordinatas orthogonales x et y elicere. Quod quo commodius fieri queat, introducamus nouam variabilem z ſitque $dz = \frac{dp\sqrt{n}}{\sqrt{(4aa-npp)}} = \frac{dq\sqrt{n}}{\sqrt{(4bq+nqq)}}$, atque tam p quam q per eandem variabilem z definiatur, primo autem prodibit A. ſin. $\frac{p\sqrt{n}}{2a} = z$ hincque $p = \frac{2a}{\sqrt{n}}$ ſin. A. z; tum vero habebitur $z = l\frac{nq+2b+\sqrt{(4nbq+nnqq)}}{c}$ hincque $q = \frac{(ce^z-2b)^2}{2nce^z}$.
Per z igitur definitis p et q, porro reperientur u et v, ex quibus tandem conſequitur.

$$s = \frac{a}{\sqrt{n}} \text{ ſin. A } z + \frac{(ce^z-2b)^2}{4nce^z} \quad \text{et}$$

$$r = a \text{ coſ. A } z + \frac{(c^2e^{2z}-4bb)}{4ce^z\sqrt{n}}.$$

§. 50. Hinc differentiando emergit $ds = \frac{adz \text{ coſ. A}. z}{\sqrt{n}} + \frac{dz(c^2e^{2z}-4bb)}{4nce^z}$, ita vt ſit $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{\sqrt{n}}$ et $\int\frac{ds}{r} = \frac{z}{\sqrt{n}}$. Quare ſi ponatur abſciſſa $= x$ et applicata $= y$ erit per §. 45.

$$x = \frac{a}{\sqrt{n}}\int dz \text{ coſ. A}. z. \text{ ſin. A} \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{4n}\int e^z dz \text{ ſin. A} \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc}\int e^{-z}dz \text{ ſin. A}. \frac{z}{\sqrt{n}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{n}}\int dz \text{ coſ. A} z. \text{ coſ. A} \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{4n}\int e^z dz \text{ coſ. A} \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc}\int e^{-z}dz \text{ coſ. A} \frac{z}{\sqrt{n}}$$

quae

quae quidem formulae iam ſufficere poſſent ad curuam per quadraturas conſtruendam; at conſtructio facilior inde euadet, quod ſingulae hae formulae differentiales actu integrationem admittant.

§. 51. Singulas autem has formulas differentiales ſequenti modo integramus: $\int dz$ coſ. A z. ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} =$ ſin. A z ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\int dz$ ſin. A z coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} =$ ſin. A z ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$ coſ. A z coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\int dz$ coſ. A z ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$; vnde oritur

$$\int dz \text{ coſ. A } z \text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n \text{ ſin. A } z.\text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}.\text{ coſ. A } z.\text{ coſ. A } \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1}$$

at caſu quo $n = 1$, quia eſt coſ. A z. ſin. A $z = \frac{1}{2}$ ſin. A $2z$ erit $\int dz$ coſ. A z. ſin. A $z = -\frac{1}{4}$ coſ. A $2z$. Deinde pari modo eſt $\int dz$ coſ. A z. coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} =$ ſin. A z coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\int dz$. ſin. A z. ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$ ſin. A z coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ coſ A ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\int dz$ coſ. A z coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$. ergo $\int dz$ coſ. A z coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{n \text{ ſin. A } z \text{ coſ. A } \frac{z}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}.\text{ coſ. A } z.\text{ ſin. A. } \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1}.$$

Caſu autem quo $n = 1$ ob coſ. A z coſ. A $z = \frac{1 + \text{coſ. A } 2z}{2}$ erit $\int dz$ coſ. A z coſ. A $z = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}$ ſin. A $2z$.

§. 52. Reliquas formulas ſimili modo integramus; eſt ſcilicet $\int e^z dz$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} = e^z$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\int e^z dz$ coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} = e^z$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{e^z}{\sqrt{n}}$ coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\int e^z dz$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$, hincque

$$\int e^z dz \text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{ne^z \text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}} - e^z\sqrt{n}.\text{ coſ. A } \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}.$$

At $\int e^z dz$ coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} = e^z$ coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\int e^z dz$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} =$

$$\frac{ne^z \text{ coſ. A } \frac{z}{\sqrt{n}} + e^z.\sqrt{n}.\text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}.$$

Deinde ſimili modo

$\int e^{-z}dz$

$\int e^{-z} dz$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z}$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{}} \int e^{-z} dz$ coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$

$= -e^{-z}$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$ $\frac{e^{-z}}{\sqrt{n}}$ coſ. A. $\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^{-z} dz$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}}$

hincque $\int e^{-z} dz$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{-ne^{-z} \text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}} - e^{-z}\sqrt{n}. \text{ coſ.A} \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$

Denique $\int e^{-z} dz$ coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z}$ coſ. A $\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^{-z} dz$ ſin. A $\frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{-ne^{-z} \text{ coſ. A } \frac{z}{\sqrt{n}} + e^{-z}\sqrt{n}. \text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$.

His igitur integralibus inuentis habebimus $x =$

$$x = \frac{a\sqrt{n} \text{ ſin. A } z \text{ . ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}} + a \text{ coſ. A } z \text{ . coſ. A. } \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$$

$$\frac{c\sqrt{n}e^{z} \text{ ſin. A} \frac{z}{\sqrt{n}} - ce^{z} \text{ coſ. A } \frac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1)\sqrt{n}} + \frac{bb\sqrt{n}e^{-z} \text{ ſin. A} \frac{z}{\sqrt{n}} + bbe^{-z} \text{ coſ.A} \frac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1)\sqrt{n}}$$

atque $y = \frac{a\sqrt{n} \text{ ſin. A} z \text{ coſ. A} \frac{z}{\sqrt{n}} - a \text{ coſ. A } z \text{ ſin. A } \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$

$$\frac{c\sqrt{n}\,.\,e^{z} \text{ coſ.A} \frac{z}{\sqrt{n}} + ce^{z} \text{ ſin.A} \frac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1)\sqrt{n}} + \frac{bb\sqrt{n}\,.\,e^{-z} \text{ coſ. A} \frac{z}{\sqrt{n}} - bbe^{-z} \text{ ſin.A } \frac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1)\sqrt{n}}$$

ſumendis quadratis obtinebitur $xx + yy =$

$$\frac{a^2(n \text{ ſin.A} z \text{ . ſin.A} z) + \text{coſ.A} z \text{.coſ A} z)}{(n-1)^2} + \frac{ace^{z}(n \text{ ſin.A} z - \text{coſ.A} z)}{2(n^2-1)\sqrt{n}}$$

$$+ \frac{2abbe^{-z}(n \text{ ſin. A} z + \text{coſ.A} z)}{c(nn-1)\sqrt{n}} + \frac{cc\,e^{2z}}{16n(n+1)} + \frac{bb(n-1)}{2n(n+1)^2} +$$

$$\frac{b^4\,e^{-2z}}{c^2n(n+1)}.$$

Simili autem modo curuae caſui praecedenti huius problematis ſatisfacientis conſtructio poteſt adornari. Ceterum curuae iſtae, quae ſuis euolutis ſecundis inuerſe ſunt ſimiles, ſimul ita ſunt comparatae vt directe ſint ſimiles ſuis euolutis quartis.

§. 52. Quod autem ad curuas attinet, quae cuicunque euolutae directe ſint ſimiles, lex aequationum inter arcum s et radium oſculi r contentarum facile patet. Pro curuis enim quae ſuis euolutis primis directe ſunt ſimiles haec habetur aequatio $\pm n s = r$. Pro curuis quae ſuis euolutis ſecundis ſint ſimiles haec $\pm n s = \frac{rdr}{ds}$. Pro curuis quae ſuis euolutis tertiis ſint ſimiles haec $\pm n s = \frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2 ddr + rdr^2}{ds^2}$; pro curuis quae ſuis euolutis quartis ſint ſimiles haec $\pm n s = \frac{r}{ds} d . \frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds} = \frac{r^3 d^3 r + 4 r^2 dr ddr + r dr^3}{ds^3}$. Pro curuis vero, quae ſuis euolutis quintis ſint ſimiles, habebitur haec aequatio $\pm n s = \frac{r}{ds} d . \frac{r}{ds} d . \frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds}$. quas aequationes quousque lubuerit continuare licet.

§. 53. Conſideremus igitur curuas, quae ſuis euolutis tertiis ſint ſimiles, quae hac aequatione continentur $\pm n s ds^2 = r^2 ddr + r dr^2$ poſito ds conſtante. Ad hanc aequationem in differentialem primi gradus transmutandam ponamus $s = e^{\frac{\int udu}{y}}$ et $r = e^{\frac{\int udu}{y}} u$ erit ob ds conſtans $ddu = \frac{dudu}{y} - \frac{du^2}{u} - \frac{udu^2}{y}$ atque $ds = e^{\frac{\int udu}{y}} \frac{udu}{y}$; $dr = e^{\frac{\int udu}{y}} (du + \frac{uvdu}{y})$; $ddr = e^{\frac{\int udu}{y}} (\frac{dudy}{y} + \frac{udw^2}{y} - \frac{dw^2}{w})$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra differentialis ſecundi gradus abit in hanc $\pm n du = y dy + 3 uy dn + u^3 du$, cuius aequationis integrale particulare reperitur eſſe $y = -u^2 - u \sqrt[3]{\pm n} - \sqrt[2]{n^2}$ Ad integrale igitur generale inueniendum ponamus $y = z - u^2 - u \sqrt[2]{\pm n} - \sqrt[3]{n^2}$

erit

erit $dy = dz - 2udu - du\sqrt[3]{\pm n}$ atque $o = zdz + zudu - zdu\sqrt[3]{\pm n} - uudz - udz\sqrt[3]{\pm n} - dz\sqrt[3]{n^2}$ Ponamus $\pm n = m^3$ quia m perinde aſſignari poteſt ſiue ſit n numerus affirmatiuus ſiue negatiuus; eritque $o = zdz + zudu - mzdu - uudz - mudz - m^2 dz$.

§. 54. Haec vero aequatio ex earum eſt numero, quae ſeparabiles redduntur, ſi ponatur $dz = pdu$, hoc enim facto erit $o = pz + zu - mz - pu^2 - mpu - m^2 p$ vnde fit $z = \frac{p(u^2 + mu + m^2)}{p + u - m}$, quae ſubſtitutio adhibeatur. Differentietur ſcilicet, eritque $dz = pdu = \frac{u^3 dp + pu^2 du - 2m^2 pdu - 2m^2 pdu - 2mpudu + 2up^2 du + mp^2 du - m^3 dp}{(p + u - m)^2}$ quae reducta abit in hanc: $\frac{du}{u^3 - m^3} = \frac{dp}{p^3 - 3mp^2 + 3m^2 p}$ ſeu $\frac{du}{(u-m)(u^2 + mu + mm)} = \frac{dp}{p(p^2 - 3mp + 3m^2)}$ quae integrata dat $\frac{1}{3m^2} l \frac{u - m}{\sqrt{(u^2 + mu + m^2)}} - \frac{1}{m^2\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{u\sqrt{3}}{u + 2m} = \frac{1}{3m^2} l \frac{p}{\sqrt{(pp - 3mp + 3m^2)}} + \frac{1}{m^2\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{p}{3m\sqrt{3} - p\sqrt{3}} + C$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{3}} l \frac{(u - m)\sqrt{(p^2 - mp + 3m^2)}}{p\sqrt{(uu + mu + m^2)}} =$ A tang. $\frac{u\sqrt{3}}{u + 2m}$ + A tang. $\frac{p}{2m\sqrt{3} - p\sqrt{3}}$ + Conſt. = A tang. $\frac{3mu + mp - pu}{2m^2\sqrt{3} - mp\sqrt{3} + mu\sqrt{3} - pu\sqrt{3}}$ + Conſt. Quia vero eſt $p = \frac{(m - u)(y + uu + mu + mm)}{y}$ erit $\frac{1}{\sqrt{3}} l \frac{\sqrt{(y^2 + y(2uu - mu - m^2) + (m - u)^2(uu + mu + mm))}}{y + uu + mu + mm} =$ A tang. $\frac{(y + (m - u)^2)(u^2 + mu + m^2}{(y(uu + mu - mm) + (u^2 - m^2)(uu + mu + mm))\sqrt{3}}$ + Conſt. vbi eſt $u = \frac{r}{s}$ et $y = \frac{rdr}{sds} - \frac{rr}{ss}$.

§. 55. Quoniam inuenimus quaeſtioni particulariter ſatisfieri aequatione $y + uu + mu + mm = o$ prodibit haec aequatio inter r et s partem quaeſtionis reſoluens $rdr + mrds + m^2 sds = o$, quae igitur aequatio erit integralis

huius

huius $m^2 s ds^2 = r^2 ddr + rdr^2$ id quod illius differentiatio indicat, etiamſi vice verſa per integrationem illa ex hac erui vix queat: Ponamus igitur ad integrale latiſſimo ſenſu acceptum inueniendum id eſſe $rdr + mrds + m^2 sds = Vds$ erit differentiando $rddr + dr^2 + mdrds + m^2 ds^2 = dVds$, ergo $r^2 ddr + rdr^2 = rdVds - mrdrds - m^2 rds^2 = m^3 sds^2$. Hinc erit porro $rdVds = m^3 sds^2 + m^2 rds^2 + mrdrds = mVds^2$ ex qua fit $\frac{dV}{V} = \frac{mds}{r}$ et $V = ce^{\int \frac{mds}{r}}$ vbi $\int . \frac{ds}{r}$ per coordinatas exprimi poteſt vt conſtat, ita vt ſit integrale $rdr + mrds + m^2 sds = ce^{\int \frac{mds}{r}} ds$.

§. 56. Succinctiores autem prodeunt aequationes pro omnibus huiusmodi curuis, quae cuipiam euolutae debent eſſe ſimiles, ſi non inter r et s ſed inter s et $\frac{ds}{r}$ quaerantur aequationes. Hunc in finem ponatur $\frac{ds}{r} = dv$ erit $r = \frac{ds}{dv}$ poſitoque elemento dv conſtante habebitur pro curvis

quae ſimiles ſunt	iſta aequatio
euolutis primis	$\pm nsdv = ds$
euolutis ſecundis	$\pm nsdv^2 = dds$
euolutis tertiis	$\pm nsdv^3 = d^3 s$
euolutis quartis	$\pm nsdv^4 = d^4 s$
euolutis quintis	$\pm nsdv^5 = d^5 s$
euolutis ſextis	$\pm nsdv^6 = d^6 s$

etc.

quae aequationes etſi ſunt vno gradu differentialium altiores quam praecedentes, tamen tractatu ſunt faciliores. Deinde

de ſi s determinetur per v, mox habebitur aequatio inter coordinatas orthogonales, x et y, ope aequationum $x = \int ds$ ſin. A v et $y = \int ds$ coſ. A v.

§. 57. Quanquam hae aequationes pluribus modis tractari poſſunt, tamen hic reliquis praeferendus eſſe videtur, quo primo eiusmodi valores ipſius s perpenduntur, quae ſuis differentialibus cuiusuis ordinis ſint ſimiles. Cum enim generaliter ſit $\frac{d^\nu s}{dv^\nu} = \pm\, n\, s$, valorem ipſius s ita comparatum eſſe oportet, vt ipſius differentiale cuiusuis gradus ipſi ſit ſimile, ſeu per id diuiſum conſtantem quantitatem producat, Huiusmodi autem quantitatum tria dantur genera, quorum primum quantitates exponentiales complectitur, ſecundum ſinus et coſinus arcuum circularium, tertium vero vtriusque ſpeciei quantitatibus exponentialibus, ſcilicet et ſinibus coſinibusque arcuum circularium coniunctim continetur.

§. 58. Primum igitur genus ita eſt comparatum vt ſit $s = e^{gv}$, huiusque formulae differentialia cuiusque gradus ſequenti modo pro-

grediuntur	eritque
I. $\frac{ds}{dv} = e^{gv} g$	$\frac{ds}{sdv} = g = \pm\, n$
II. $\frac{dds}{dv^2} = e^{gv} g^2$	$\frac{dds}{sdv^2} = g^2 = \pm\, n$
III. $\frac{d^3s}{dv^3} = e^{gv} g^3$	$\frac{d^3s}{sdv^3} = g^3 = \pm\, n$
IV. $\frac{d^4s}{dv^4} = e^{gv} g^4$	$\frac{d^4s}{sdv^4} = g^4 = \pm\, n$
etc.	etc.

Apparet igitur aequationem $s = e^{gv}$ ſatisfacere plerisque quaeſtionum caſibus, quibus curuae euolutis ſuis dati ordi-

nis ſimiles requiruntur. Quodſi enim quaeratur curua, quae ſuae euolutae ordinis ν ſit ſimilis, duplex pro ea habetur aequatio ſcilicet vel $d^\nu s = n s d v^\nu$, vel $d^\nu s = -n s d v^\nu$; quarum aequationum priori ſemper ſatisfacit valor $s = e^{gv}$, ſumto $g = \sqrt[\nu]{n}$. Alteri vero caſui haec aequatio tantum ſatisfacit, ſi ν fuerit numerus impar, fitque $g = \sqrt[\nu]{-n} = -\sqrt[\nu]{n}$; ſin autem fuerit ν numerus par, aequationi $d^\nu s = -n s d v^\nu$ iſte valor $s = e^{gv}$ ob g imaginarium ſatisfacere nequit.

§. 59. Perſpicuum porro eſt quibus caſibus aequationi $d^\nu s = \pm n s d v^\nu$ ſatisfaciat valor $s = e^{gv}$, id quod euenit ſi fiat $g^\nu = \pm n$, iisdem caſibus ſatisfacere valorem $s = c e^{gv}$, quia conſtans c vtramque aequationis partem afficit. Quando autem ad hanc peruentum fuerit aequationem $s = c e^{gv}$, pro curua quaeſita, aequationes $x = \int ds$ ſin. A . v et $y = \int ds$ coſ. A . v ſuppeditabunt aequationem inter coordinatas orthogonales curuae quaeſitae. Erit autem $x = c g \int e^{gv} dv$ ſin. A $v = c e^{gv}$ ſin. A $v - c \int e^{gv} dv$ coſ. A . $v = c e^{gv}$ ſin. A $v - \frac{c}{g} e^{gv}$ coſ. A $v - (\frac{c}{g} \int e^{gv} dv$ ſin. A . $v) - \frac{x}{gg}$; vnde fit $x = c g e^{gv} \frac{(g \text{ ſin. A} v - \text{coſ. A} v)}{1 + gg}$. Cum vero ſit $y = c g \int e^{gv} dv$ coſ. A v erit $y = c g e^{gv}$ ſin. A $v - g x$ ſeu $y = \frac{c g e^{gv} (\text{ſin. A} v + g \text{coſ. A} v)}{1 + gg}$, quae aequatio ſemper eſt ad logarithmicam ſpiralem.

§. 60. Secundum genus valorum ipſius s qui ſuis differentialibus cuiusque ordinis ſunt ſimiles eſt $s = \alpha$ ſin. A. $bv +$

$hv + \beta \,\text{coſ.}\, A . hv$: cuius differentialia ſequenti modo progredientur.

$$\frac{ds}{dv} = - \beta h \,\text{ſin.}\, A . hv + \alpha h \,\text{coſ.}\, A . hv$$
$$\frac{dds}{dv^2} = - \alpha h^2 \,\text{ſin.}\, A . hv - \beta h^2 \,\text{coſ.}\, A . hv$$
$$\frac{d^3 s}{dv^3} = + \beta h^3 \,\text{ſin.}\, A . hv - \alpha h^3 \,\text{coſ.}\, A . hv$$
$$\frac{d^4 s}{dv^4} = + \alpha h^4 \,\text{ſin.}\, A . hv + \beta h^4 \,\text{coſ.}\, A . hv \quad \text{etc.}$$

Differentialia igitur tantum ordinum parium ita ſunt comparata, vt per s diuiſa quantitatem conſtantem producant. Aequationi ſcilicet $d^{2\nu} s = \pm n s dv^{2\nu}$ ſatisfaciet aequatio $s = \alpha \,\text{ſin.}\, A . hv + \beta \,\text{coſ.}\, A\, hv$ ſumendo $(-h^2)^\nu = \pm n$.

§. 61. Tertium genus valorum ipſius s ambo priora in ſe complectitur, atque ideo ſolum conſiderari meretur, cum per id omnibus omnino caſibus ſatisfieri queat. Formula autem generalis ita ſe habet $s = e^{gv}(\alpha \,\text{ſin.}\, A hv + \beta \,\text{coſ.}\, A . hv)$ differentialia vero ſequenti modo progrediuntur

$$\frac{ds}{dv} = e^{gv} \left\{ \begin{matrix} -\beta h \\ +\alpha g \end{matrix} \;\text{ſin.}\, A . hv \quad \begin{matrix} +\alpha h \\ +\beta g \end{matrix} \;\text{coſ.}\, A . hv \right\}$$

$$\frac{dds}{dv^2} = e^{gv} \left\{ \begin{matrix} -\alpha h^2 \\ -2\beta g h \\ +\alpha g^2 \end{matrix} \;\text{ſin.}\, A . hv \quad \begin{matrix} -\beta h^2 \\ +2\alpha g h \\ +\beta g^2 \end{matrix} \;\text{coſ.}\, A . hv \right\}$$

$$\frac{d^3 s}{dv^3} = e^{gv} \left\{ \begin{matrix} +\beta h^3 \\ -3\alpha g h^2 \\ -3\beta g^2 h \\ +\alpha g^3 \end{matrix} \;\text{ſin.}\, A . hv \quad \begin{matrix} -\alpha h^3 \\ -3\beta g h^2 \\ +3\alpha g^2 h \\ +\beta g^3 \end{matrix} \;\text{coſ.}\, A . hv \right\}$$

$$\frac{d^4 s}{dv^4} = e^{gv} \left\{ \begin{matrix} +\alpha h^4 \\ +4\beta g h^3 \\ -6\alpha g^2 h^2 \\ -4\beta g^3 h \\ +\alpha g^4 \end{matrix} \;\text{ſin.}\, A . hv \quad \begin{matrix} +\beta h^4 \\ -4\alpha g h^3 \\ -6\beta g^2 h^2 \\ +4\alpha g^3 h \\ +\beta g^4 \end{matrix} \;\text{coſ.}\, A . hv \right\}$$

etc.

Ex

Ex quibus formulis colligitur fore generaliter $\frac{d^\nu s}{dv^\nu} = e^{gv}$

$$\Big(\frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu+(g-h\sqrt{-1})^\nu}{2}\alpha \sin. A . hv + \frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu-(g+h\sqrt{-1})^\nu}{2\sqrt{-1}} \beta \sin. A . hv + \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu+(g-h\sqrt{-1})^\nu}{2}\beta \cos. A . hv + \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu-(g-h\sqrt{-1})^\nu}{2\sqrt{-1}} \alpha \cos. A . hv\Big)$$

§. 62. Ponamus eſſe debere $\frac{d^\nu s}{dv^\nu} = ms$ exiſtente $m = \pm n$, ita vt m quantitatem quamcunque ſiue affirmatiuam ſiue negatiuam ſignificet: eritque comparatione inſtituta

$$m\alpha = \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{2} + \frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{2}$$

et $m\beta = \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu(\beta-\alpha\sqrt{-1})}{2}+\frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu(\beta+\alpha\sqrt{-1})}{2}$;

ex quibus aequationibus eliminata m conficitur haec aequatio

$$(g+h\sqrt{-1})^\nu(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{-1} = (g-h\sqrt{-1})^\nu(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{-1}$$

cui quidem ſatisfacit expreſſio $\alpha^2+\beta^2=0$, at quia hinc ad imaginaria peruenitur, hic valor tanquam inutilis eſt reiiciendus. Quamobrem habebitur $(g+h\sqrt{-1})^\nu = (g-h\sqrt{-1})^\nu$, quae euoluta abit in hanc $\nu g^{\nu-1} h - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} g^{\nu-3} h^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} g^{\nu-5} h^5 -$ etc. $=0$ ex qua aequatione g per h definiri oportet.

§. 63. Ex inſpectione harum formularum mox intelligitur eas diuiſionem arcuum circularium inuoluere. Quodſi ſcilicet ſumatur arcus quispiam w in circulo, cuius radius $= 1$, pouaturque $g = f \cos. A. w$ et $h = f \sin. A.$ w,

w, debebit w eiusmodi eſſe arcus, vt ſit ſin A. $\nu w = o$. Sumtis autem huius modi arcubus pro w, reperietur valor litterae $m = f^\nu$ coſ. A. νw. Hanc ob rem pro νw ſucceſſiue ſubſtitui debebunt arcus $0°$, $180°$, $360°$, $540°$, etc. pro ſingulisque valores cum arcuum w tum litterarum g et h definiri; quo facto obtinebitur valor ipſius m, qui ſemper erit vel $+f^\nu$ vel $-f^\nu$. Litterae autem α et β omnino manent indeterminatae, indeque ſolutiones latius patentes colligentur:

§. 64. Quoniam pro α et β quantitates quaecunque accipi poſſunt, ſumatur $\alpha = c$ coſ. A. ζ; et $\beta = c$ ſin. A. ζ erit $s = c\, e^{gv}$ ſin. A $(h v + \zeta)$: in qua aequatione litterae g et h ex valoribus n et ν determinantur. Cum autem haec determinatio pendeat ab reſolutione aequationis ν dimenſionum, in qua omnes radices ſint reales, manifeſtum eſt totidem valores pro s inventum iri:. At ſi aequationem $d^\nu s = \pm n s d v^\nu$ inſpiciamus, facile intelligimus, ſi ſatisfaciant valores $s = P$, $s = Q$, $s = R$; etc. ſingulatim exiſtentibus P, Q et R functionibus ipſius v, tum etiam ſatisfacere aequationem ex his coniunctam $s = \alpha P + \beta Q + \gamma R$; haecque aequatio integralis aeque late patebit ac differentialis propoſita, ſi pro P, Q, R. omnes particulares ipſius s valores accipiantur.

§. 65. Percurramus igitur ordine ſingulos ipſius ν valores, et pro angulo 180 graduum ponamus π, ita vt ſit $360° = 2\pi : 540° = 3\pi$ etc. Primum ergo ſit $\nu = 1$, ſeu ſatisfiat aequationi $d s = m s d v$ eritque $\nu w = w = o$; atque hinc $g = f$, et $h = o$ et $m = f$; ex quo aequationis huius

$$d s = f s d v$$

erit aequatio integralis haec:

$$s = C e^{fv}$$

Quodſi autem ponatur $\nu w = w = \pi$, fiet $g = -f$; $h = o$; et $m = -f$, vnde prodit huius aequationis $ds = -f s d v$ integralis haec $s = C e^{-fv}$ quae quidem in praecedente iam continetur facto f negatiuo. Quare aequatio $s = C e^{\pm fv}$ omnes praebet curuas, quae ſimiles ſunt ſuis euolutis primis, quas iam oſtendimus eſſe logarithmicas ſpirales.

§. 66. Sit porro $\nu = 2$, ſeu integretur aequatio $dds = msdv^2$: atque primo ponatur $\nu w = 2w = 0$, erit $w = 0$, et $g = f$, ac $h = 0$, atque $m = ff$, vnde huius aequationis $dds = ffsdv^2$ integralis erit $s = Ce^{fv}$. Secundo ſit $\nu w = 2w = \pi$, erit $w = \frac{1}{2}\pi = 90°$; atque $g = 0$; $h = f$; et $m = -ff$: vnde aequationis $dds = -ffsdv^2$ integralis erit $s = C$ ſin. A $(fv + \zeta)$. Tertio ſit $\nu w = 2w = 2\pi$ ſeu $w = \pi = 180°$; erit $g = -f$; $h = 0$; et $m = ff$; vnde aequationis $dds = ffsdv^2$ integralis eſt $s = Ce^{-fv}$. Quarto ſit $\nu w = 2w = 3\pi$ ſeu $w = \frac{3}{2}\pi$; erit $g = 0$; $h = -f$; et $m = -ff$, ex quo aequationis $dds = -ffsdv^2$ integralis erit $s = C$ ſin. A $(\zeta - fv) = C$ ſin. A $(fv - \zeta)$ quae quidem aequatio cum ſuperiori caſu ſecundo inuenta congruit, vtraque enim continetur in forma α ſin. A. $fv + \beta$ coſ A. fv.

§. 67. Hinc itaque vtriusque aequationis differentialis ſecundi gradus $dds = ffsdv^2$ et $dds = -ffsdv^2$ completa nanciſcimur integralia, atque adeo curuas obtinemus omnes, quae ſint ſuis euolutis ſecundis ſimiles. Scilicet cum pro caſu priore duplex inuenta ſit aequatio integralis, ambo

ambo ipſius s valores per conſtantes quantitates multiplicati et inuicem coniuncti dabunt completum integrale. Sic aequationis huius:

$$dds = + ffs\,dv^2$$

integrale erit completum:

$$s = Ce^{fv} + De^{-fv}$$

At alterius aequationis

$$dds = - ffs\,dv^2$$

integrale completum erit hoc:

$$s = C \text{ ſin. A.} fv + D \text{ coſ. A.} fv$$

in vtroque enim integrali inſunt duae nouae conſtantes C et D, quae ex duabus integrationibus ſunt natae.

§. 68. Ponamus $v = 3$, ita vt integranda ſit aequatio haec $d^3 s = ms\,dv^3$; ac primo ponatur $3w = 0$ ſeu $w = 0$ erit $g = f$, $h = 0$, et $m = f^3$ vnde aequationis $d^3 s = h s^3 dv^3$ integralis erit $s = Ce^{fv}$. Deinde ſit $3w = \pi$ ſeu $w = \frac{1}{3}\pi = 60°$; erit $g = f$ coſ A. $\frac{1}{3}\pi$ et $h = f$ ſin. A. $\frac{1}{3}\pi$ atque $m = -f^3$, vnde aequationis $d^3 s = -f^3 s\,dv^3$ integralis erit $s = e^{fv \cos. A. \frac{1}{3}\pi}$ (α ſin. A. fv ſin. A. $\frac{1}{3}\pi$ + β coſ. A. fv ſin. A. $\frac{1}{3}\pi$). Tertio ſit $3w = 2\pi$ ſeu $w = \frac{2}{3}\pi = 120°$, erit $g = f$ coſ. A. $\frac{2}{3}\pi$, $h = f$ ſin. A. $\frac{2}{3}\pi$, et $m = f^3$, vnde aequationis $d^3 s = f^3 s\,dv^3$ integrale erit $s = e^{fv \cos. A \frac{2}{3}\pi}$ α ſin. A fv ſin. A $\frac{2}{3}\pi$ + β coſ. A. fv ſin. A. $\frac{2}{3}\pi$). Ex quibus huius aequationis

$$d^3 s = + f^3 s\,dv^3$$

prodit integrale completum.

$$s = Ce^{fv} + e^{fv \cos. A \frac{2}{3}\pi} (D \text{ ſin. } A. fv \text{ ſin. A} \tfrac{2}{3}\pi + E \text{ coſ. A.} fv \text{ ſin. A} \tfrac{2}{3}\pi)$$

Alterius vero aequationis differentialis

$$d^3 s = -f^3 s\,dv^3$$

integrale completum erit hoc

$$s = Ce^{-fv} + e^{fv\,\text{coſ. A}\frac{1}{3}\pi}(\text{D ſin. A.}\,fv\,\text{ſin. A}\tfrac{1}{3}\pi + \text{E coſ. A.}\,fv\,\text{ſin. A}\tfrac{1}{3}\pi$$

vbi notandum eſt eſſe ſin. A $\frac{1}{3}\pi = \frac{\surd 3}{2}$; ſin. A $\frac{2}{3}\pi = \frac{\surd 3}{2}$; coſ. A $\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ et coſ. A. $\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$.

§. 69. Ponamus nunc $\nu = 4$ ſeu hanc contemplemur aequationem $d^4 s = ms\,dv^4$, ac primo ſit $4w = 0$, erit $g = f$, $h = 0$, et $m = f4$ vnde fit $s = Ce^{fv}$. Deinde ſit $4w = \pi$ ſeu $w = \frac{1}{4}\pi$ erit $g = f$ coſ. A. $\frac{1}{4}\pi$ et $h = f$ ſin. A. $\frac{1}{4}\pi$, atque $m = -f^4$ vnde fit $s = Ce^{fv\,\text{coſ. A}\frac{1}{4}\pi}$ ſin. A $(fv$ ſin. A. $\frac{1}{4}\pi + \zeta)$ hanc enim formam praeſtat adhibere quam alteram, in qua inſuper coſinus arcus hv occurit. Tertio ſi ponatur $4w = 2\pi$ ſeu $w = \frac{2}{4}\pi$ erit $g = f$ coſ. A $\frac{2}{4}\pi = 0$; $h = f$ ſin. A $\frac{2}{4}\pi = f$ et $m = f^4$, vnde fit $s = Ce^{fv\,\text{coſ. A}\frac{2}{4}\pi}$ ſin. A $(fv$ ſin. A $\frac{2}{4}\pi + \zeta)$. Quarto ſi ponatur $4w = 3\pi$ ſeu $w = \frac{3}{4}\pi$, fit iterum

$m = -f^4$ et $s = Ce^{fv\,\text{coſ. A}\frac{3}{4}\pi}$ ſin. A $(fv$ ſin. A . $\frac{3}{4}\pi + \zeta)$. Ex his igitur colligitur huius aequationis $d^4 s = -f^4 s\,dv^4$ integrale completum hoc:

$$s = Ce^{fv} + De^{fv\,\text{coſ. A}\frac{2}{4}\pi}\,\text{ſin. A}(fv\,\text{ſin. A.}\tfrac{2}{4}\pi + \delta) + Ee^{-fv}$$

Alterius vero aequationis huius $d^4 s = -f^4 s\,dv^4$ integrale completum erit hoc:

$$s = Ce^{fv\,\text{coſ. A}\frac{1}{4}\pi}\,\text{ſin. A}(fv\,\text{ſin. A}\tfrac{1}{4}\pi + \gamma) +$$
$$De^{fv\,\text{coſ. A}\frac{3}{4}\pi}\,\text{ſin. A}(fv\,\text{ſin. A}\tfrac{3}{4}\pi + \delta).$$

§. 70. Non opus eſt, vt haec vlterius proſequamur, cum tam ex his formis quam methodo ipſa iam pateat lex progreſſionis. Habebimus igitur generaliter huius aequatio-

quationis differentialis $d^{\nu} s = + f^{\nu} s d v^{\nu}$ iſtam aequationem integralem completam

$$s = C e^{fv} + D e^{fv \cos. A \frac{2}{\nu} \pi} (\sin. A (fv \sin. A \frac{2}{\nu} \pi + \delta) + E e^{fv \cos. A \frac{4}{\nu} \pi} \sin. A (fv \sin. A \frac{4}{\nu} \pi + \varepsilon) + F e^{fv \cos. A \frac{6}{\nu} \pi} \sin. A (fv \sin. A \frac{6}{\nu} \pi + \zeta) + G e^{fv \cos. A \frac{8}{\nu} \pi} \sin. A (fv \sin. A \frac{8}{\nu} \pi + \eta)$$

etc. quos terminos quidem in infinitum continuare licet, at ſufficit eousque continuaſſe, quoad terminus occurrat primo ſimilis, id quod accidit ſumendis terminis vel $\frac{\nu+2}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ prout ν fuerit numerus vel par vel impar.

§. 71. Simili modo integrale alterius aequationis differentialis indefiniti gradus erit comparatum

$$d^{\nu} s = - f^{\nu} s d v^{\nu}$$

huius ſcilicet aequationis integrale completum erit

$$s = C e^{fv \cos. A \frac{1}{\nu} \pi} \sin A (fv \sin. A \frac{1}{\nu} \pi + \gamma) + D e^{fv \cos. A \frac{3}{\nu} \pi} \sin. A (fv \sin. A \frac{3}{\nu} \pi + \delta) + E e^{fv \cos. A \frac{5}{\nu} \pi} \sin A (fv \sin. A \frac{5}{\nu} \pi + \varepsilon)$$

$+$ etc. quam itidem non opus eſt in infinitum producere, cum ſumtis vel $\frac{\nu}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ terminis iidem termini recurrant, ſequentesque iam in praecedentibus contineantur. Completum autem integrale vtriusque aequationis differentialis propoſitae cognoſcetur, ſi tot quantitates conſtantes C, D, E etc. γ, δ, ε etc. iam fuerint ingreſſae, quod ν continet vnitates. Deinde etiam iuſto plures termini non accipientur, ſi π nusquam per fractionem vnitate maiorem multiplicetur.

§. 72. In vtraque igitur expreſſione integrali alii termini non continentur niſi huius formae

$$B e^{fv \cos. A \frac{\mu}{\nu} \pi} \sin. A (fv \text{ ſie. } A \frac{\mu}{\nu} \pi + \beta)$$

F 3 Neque

Neque vero tantum arcus curuarum quaeſitarum s per huiusmodi formulas ipſius v exprimuntur, ſed etiam abſciſſae et applicatae x et y. Cum enim ſit $x = \int ds\, \text{ſin. A} \cdot v$ et $y = \int ds\, \text{coſ. A} \cdot v$; ſi pro s expreſſiones inuentae ſubſtituantur, hae formulae actu integrari poterunt. Namque formula generali aſſumta erit $ds = \text{B}e^{fv\,\text{coſ. A}\frac{\mu}{\nu}\pi}\, dv(f\,\text{coſ. A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi \,.\, \text{ſin. A}(fv\,\text{ſin. A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi + \beta) + f\,\text{ſin. A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi \,.\, \text{coſ. A}\,(fv\,\text{ſin. A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi + \beta))$, quae expreſſio, ſi pro B et β ſubſtituantur ſucceſſiue litterae C, D, E etc. et γ, δ, ε, etc. itemque pro μ numeri vel 0, 2, 4, 6, etc. vel 1, 3, 5, 7, etc. prout vel prioris vel poſterioris aequationis differentialis integrale deſideratur, verum elementi ds valorem exhibet.

§. 73. Multiplicetur igitur iſtud differentiale ds primum per ſin. Av, vt prodeat elementum dx, reperieturque integrando $x = \text{B}e^{fv\,\text{coſ. A}\frac{\mu}{\nu}\pi}$

$$\frac{(f^4\,\text{ſin. A}\,(fv\,\text{ſin. A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi + \beta)\,\text{ſin. A}v - f^3\,\text{ſin. A}(fv\,\text{ſin A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi + \beta - \frac{\mu}{\nu}\pi)\,\text{coſ. A}v}{f^4 + 2ff\,\text{coſ. A}}$$

$$\frac{-f\,\text{ſin. A}\,(fv\,\text{ſin A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi + \beta + \frac{\mu}{\nu}\pi)\,\text{coſ. A}v + ff\,\text{ſin. A}(fv\,\text{ſin A}\,\frac{\mu}{\nu}\pi + \beta + \frac{2\mu}{\nu}\pi)\,\text{ſin. A}v)}{\frac{2\mu}{\nu}\pi + 1}$$

Simili modo cum per quantitates exponentiales, tum per ſinus coſinusque arcuum circularium applicata y determinabitur idque per eandem variabilem v quae curuae amplitudinem deſignat, eſt enim $v = \int \frac{ds}{r}$. Ex quo intelligitur omnes omnino curuas, quae quampiam evolutam ſui habeant ſimilem conceſſis circuli et hyperbolae quadraturis conſtrui poſſe.

§. 74.

§. 74. His ergo expoſitis problema initio propoſitum ſenſu latiſſimo acceptum poterimus reſoluere, et omnes curvas aſſignare quae ſimiles ſint ſuis euolutis cuiuscunque gradus. Hocque ipſo limites analyſeos non parum amplificaſſe iure mihi videor, cum aequationes differentiales altiorum graduum, ad quas peruenitur, non ſolum commode tractare ſed etiam integrare docuerim. Hac ſcilicet methodo non ſolum aequationum $d^\nu s = \pm f^\nu s dv^\nu$ integratio eſt in poteſtate, verum etiam earum aequationum, ex quibus hae ſunt ortae, quae ſunt $\pm ns = r$; $\pm ns = \frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$ etc. in infinitum. Quin etiam conſtructio omnium earum aequationum, quae ex his oriuntur quibuscunque adhibitis ſubſtitutionibus conſequitur, quae aliis viis omnino fruſtra tentantur, cuiusmodi aequationes iam nonnullas elicuimus.

§. 75. Quodſi ergo quaeratur curua, quae ſuae euolutae ordinis cuiuscunque ν ſit ſimilis, eiusque curuae arcus ponatur $= s$, radius osculi r, atque elementum amplitudinis $\frac{ds}{r} = dv$, obtinebitur poſito dv conſtante pro curua quaeſita vel haec aequatio $d^\nu s = + f^\nu s dv^\nu$ vel haec $d^\nu s = - f^\nu s dv^\nu$ quarum vtraque ita integrari poteſt, vt valor ipſius s per v definiatur, vti ex praecedentibus apparet. Inuenta autem hac aequatione integrali, innoteſcit mox radius osculi r, qui eſt $= \frac{ds}{dv}$; ac praeterea relatio inter coordinatas orthogonales poterit definiri; poſitis enim abſciſſa $= x$ et applicata $= y$ erit $x = \int ds$ ſin. v, et $y = \int ds$ coſ. v quae ambae integrationes adeo actu perfici poſſunt.

§. 76.

§. 76. Vt igitur natura harum curuarum facile in conſpectum cadat, ſingula problemata breuiter repetere atque aequationes integrales inter s et v exhibere eſt viſum. Hic autem tantum ſimilitudinem directam conſideramus, quoniam ſimilitudo inuerſa ad directam reducitur, vt iam ſupra notauimus. Singula vero haec problemata, quibus curuae deſiderantur, quae ſuis euolutis dati ordinis ſint ſimiles, duplicem admittunt ſolutionem ob aequationem ambiguam $d^v s = \pm f^v s dv^v$. Quanquam enim haec ambiguitas, ſi v eſt numerus impar, nullum diſcrimen infert, tamen ſi v eſt par, ambo caſus a ſe inuicem maxime ſunt diuerſi, quocirca pro ſingulis problematis vtrumque caſum ſeorſim euoluemus.

Problema I.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis primis.

Solutio I. $ds = + f s dv$

et integrando

$$s = C e^{fv}$$

Solutio 2. $ds = - f s dv$

et integrando

$$s = C e^{-fv}$$

Problema II.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſecundis.

Solutio 1. $d^2 s = + f^2 s dv^2$

et integrando

$$s = C e^{fv} + D e^{-fv}$$

Solutio

Solutio 2. $d^2 s = -f^2 s\, dv^2$
et integrando
$s = C$ ſin. A $(fv + \gamma)$

Problema III.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis tertiis.
Solutio 1. $d^3 s = + f^3 s\, dv^3$
et integrando
$s = C e^{fv} + D e^{-\frac{1}{2} fv}$ ſin. A $(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \delta)$
Solutio 2. $d^3 s = - f^3 s\, dv^3$
et integrando
$s = C e^{\frac{fv}{2}}$ ſin A $(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \gamma) + D e^{-fv}$

Problema IV.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis quartis.
Solutio 1. $d^4 s = + f^4 s\, dv^4$
et integrando
$s = C e^{fv} + D$ ſin A $(fv + \delta) + E e^{-fv}$
Solutio 2. $d^4 s = - f^4 s\, dv^4$
et integrando
$s = C e^{\frac{fv}{\sqrt{2}}}$ ſin A $(\frac{fv}{\sqrt{2}} + \gamma) + D e^{\frac{-fv}{\sqrt{2}}}$ ſin. A $(\frac{fv}{\sqrt{2}} + \delta)$

Problema V.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis quintis.

Solutio 1. $d^5 s = + f^5 s dv^5$

et integrando

$$s = Ce^{fv} + De^{\frac{fv(\sqrt{5}-1)}{4}} \text{ ſin. A } \left(\frac{fv\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} + \delta\right) +$$

$$Ee^{\frac{-fv(\sqrt{5}+1)}{4}} \text{ ſin. A } \left(\frac{fv\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4} + \varepsilon\right)$$

Solutio 2. $d^5 s = - f^5 s dv^5$.

et integrando

$$s = Ce^{\frac{fv(\sqrt{5}+1)}{4}} \text{ ſin. A } \left(\frac{fv\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4} + \gamma\right) + De^{\frac{-fv(\sqrt{5}-1)}{4}}$$

$$\text{ſin. A } \left(\frac{fv\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} + \delta\right) + Ee^{-fv}$$

Problema VI.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſextis.

Solutio 1. $d^6 s = + f^6 s dv^6$

et integrando

$$s = Ce^{fv} + De^{\frac{fv}{2}} \text{ ſin. A } \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \delta\right) + Ee^{\frac{-fv}{2}}$$

$$\text{ſin A } \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \varepsilon\right) + Fe^{-fv}$$

Solutio 2. $d^6 s = - f^6 s dv^6$

et integrando

$$s = Ce^{\frac{fv\sqrt{3}}{2}} \text{ ſin. A } \left(\frac{fv}{2} + \gamma\right) + D \text{ ſin. A} (fv + \delta) +$$

$$Ee^{\frac{-fv\sqrt{3}}{2}} \text{ ſin. A } \left(\frac{fv}{2} + \varepsilon\right)$$

§. 77. Conceſſa igitur peripheriae circuli ſectione in partes aequales, problemata huius generis, quousque lubuerit continuari, atque facili negotio reſolui poſſunt. Ita ad

curuas

curuas definiendas, quae ſuis euolutis ſeptimis ſint ſimiles, noſſe oportet ſinus et coſinus partium ſeptimarum peripheriae circuli ſeu partium $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, quorum determinatio a reſolutione aequationis cubicae pendet. Cum autem in hoc negotio aequationum algebraicarum cuiusuis gradus reſolutio merito poſtuletur, tota methodus, quam ad huiusmodi problemata reſoluenda exhibuimus, nulla amplius laborat difficultate; neque aequationes differentiales cuiuscunque gradus moleſtiam afferent, ſed omnes aequali fere opera tractabuntur et conſtruentur.

§. 78. Quanquam autem per hanc methodum eae tantum curuae determinantur, quae cuipiam ex ſuis euolutis directe ſint ſimiles, tamen per eandem viam eas curvas quoque aſſignare licet, quae ſuis euolutis dati ordinis inverſe ſint ſimiles. Quodſi enim curua requiratur, quae ſuae euolutae ordinis ν inuerſe ſit ſimilis, atque aequatio inter s et v eo, quo ſupra vſi ſumus modo eruatur, reperietur ea eſſe $d^{2\nu}s = -f^{2\nu}s\,dv^{2\nu}$. Ita curuae, quae ſuis euolutis primis inuerſe ſunt ſimiles, continentur in aequatione $dds = -f^2 s\,dv^2$, et curuas, quae ſuis euolutis ſecundis inverſe ſimiles ſunt, complectitur aequatio $d^4 s = -f^4 s\,dv^4$ et ita porro: quae aequationes omnes methodo tradita tractari et integrari poſſunt.

§. 79. Denique praeterire non poſſum, quin moneam methodum hanc multo latius patere, quam ad eas tantum aequationes differentiales altiorum graduum, quae ſe in hoc negotio obtulerunt integrandas. Maximum enim eadem methodus praeſtat vſum in integratione infinitarum aliarum aequationum differentialium altiorum graduum; quae

aliis viis fruſtra tractantur: cuiusmodi eſt aequatio haec $\alpha s = \frac{\beta ds}{dv} + \frac{\gamma dds}{dv^2} + \frac{\delta d^3 s}{dv_3} + \frac{\varepsilon d^4 s}{dv^4} +$ etc. poſito dv conſtante. Quousque enim etiam haec aequatio fuerit continuata, eius integrale ſeu valor finitus ipſius s per v ſemper poteſt exhiberi. Sed quoniam in hac diſſertatione tantum problema propoſitum de euolutarum ſimilitudine euoluere conſtitui, pleniorem huius methodi vſum alia occaſione declarabo.

DISSER-

DE SERIEBVS QVIBVSDAM CONSIDERATIONES.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Poſtquam inueniſſem ſerierum reciprocarum hac forma contentarum

$$1 \pm \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} \pm \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$$

vbi ambiguorum ſignorum ſuperiora valent, ſi n eſt numerus par, inferiora vero ſi n eſt numerus impar, ſummas a quadratura circuli pendere, ac per tantam peripheriae circuli π poteſtatem determinari, cuius exponens ſit $= n$; nonnullae ſe mihi obtulerunt obſeruationes, cum ad has ipſas ſeries, tum ad earum vſum in ſummandis aliis ſeriebus ſpectantes. Quae cum non admodum ſint obuiae, ac fortaſſe ad alia negotia vtilitatem non ſpernendam afferre queant, eas hic exponere non abs re fore ſum arbitratus.

§. 2. Poſita conſtanter ratione diametri ad circuli peripheriam vt 1 ad π, conſidero circulum, cuius radius ſeu ſemidiameter ſit $= 1$, et denotabit π eius ſemicircumferentiam ſeu arcum 180 graduum. Quod ſi nunc accipiatur in hoc circulo arcus $= s$, cuius ſinus ſit $= y$; coſinus $= x$, et tangens $= t$; erit

$$y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2....7} + \text{etc.}$$

$$x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2....6} + \text{etc.}$$

 atque

atque hinc

$$0 = t - s - \frac{s^2 t}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^4 t}{1.2.3.4} - \frac{s^5}{1.2...5} - \frac{s^6 t}{1.2....6} + \text{etc.}$$

ſeu

$$0 = 1 - \frac{s}{t} + \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3 t} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^5}{1.2...5 t} - \frac{s^6}{1.2...6} + \text{etc.}$$

§. 3. Conſideremus primo aequationem, qua relatio inter ſinum y et arcum s continetur, ac manifeſtum eſt, valorem s pro dato y non eſſe conſtantem, ſed omnes eos arcus denotare, quorum idem eſt communis ſinus y. Sit arcuum horum minimus $= \frac{m}{n}\pi$, habebunt omnes ſequentes arcus

$$\frac{m}{n}\pi, \quad \frac{n-m}{n}\pi, \quad \frac{2n+m}{n}\pi, \quad \frac{3n-m}{n}\pi, \quad \frac{4n+m}{n}\pi, \text{ etc.}$$

$$-\frac{n-m}{n}\pi; -\frac{2n+m}{n}\pi; -\frac{3n-m}{n}\pi, -\frac{4n+m}{n}\pi, -\frac{5n-m}{n}\pi \text{ etc.}$$

eundem communem ſinum y, Quocirca huius aequationis:

$$0 = 1 - \frac{s}{1 \cdot y} + \frac{s^3}{1.2.3 y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5 y} + \frac{s^7}{1.2...7 y} - \text{etc.}$$

habebuntur ſequentes innumerabiles factores:

$$\left(1 - \frac{ns}{m\pi}\right)\left(1 + \frac{ns}{(n+m)\pi}\right)\left(1 - \frac{ns}{(n-m)\pi}\right)\left(1 + \frac{ns}{(2n-m)\pi}\right)\left(1 - \frac{ns}{(2n+m)\pi}\right)\text{etc.}$$

§. 4. Hinc itaque valores ipſius $\frac{1}{s}$ conſtituent ſequentem ſeriem:

$$\frac{n}{m\pi} + \frac{n}{(n-m)\pi} - \frac{n}{(n+m)\pi} - \frac{n}{(2n-m)\pi} + \frac{n}{(2n+m)\pi} + \frac{n}{(3n-m)\pi} - \text{etc.}$$

Horum itaque ſumma aequalis erit coefficienti ipſius $-s$ in aequatione, qui eſt $= \frac{1}{1y}$: Summa factorum ex binis erit $= 0$, ſumma ex ternis $= -\frac{1}{1...3y}$, etc. vti ſequitur:

ſumma terminorum $= \frac{1}{1y}$

ſumm. fact. ex binis $= 0$

ſumm. fact. ex ternis $= \frac{-1}{1.2.3y}$

ſumm. fact. ex quaternis $= 0$

ſum.

ſumm. fact. ex quinis $= \frac{1}{1.2.\,.\,.5y}$
ſumm. fact. ex ſenis $= 0$
ſumm. fact. ex ſeptenis $= \frac{-1}{1.\,.\,.4.5.\,.7y}$
ſumm. fact. ex octonis $= 0$
etc.

§ 5. Quod ſi autem generatim ſeriei cuiuscunque $a + b + c + d + e +$ etc. fuerit

ſumma ipſorum terminorum $= \alpha$
ſumma factorum ex binis $= \beta$
ſumma factorum ex ternis $= \gamma$
ſumma factorum ex quaternis $= \delta$
ſumma factorum ex quinis $= \varepsilon$
ſumma factorum ex ſenis $= \zeta$
etc.

poterunt ex his ſummae quadratorum, cuborum, biquadratorum, et poteſtatum quarumuis terminorum huius ſeriei aſſignari. Quodſi enim ſit

$a + b + c + d$ etc- $= A$
$a^2 + b^2 + c^4 + d^2 +$ etc- $= B$
$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 +$ etc. $= C$
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 +$ etc. $= D$
$a^5 + b^5 + c^5 + a^5 +$ etc. $= E$
$a^6 + b^6 + c^6 + a^6 +$ etc. $= F$
etc.

ſequenti modo iſtarum ſummarum valores determinabuntur.

$A = \alpha$
$B = \alpha A - 2\beta$
$C = \alpha B - \beta A + 3\gamma$
$D = \alpha C - \beta B + \gamma A - 4\delta$

E =

$$E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + 5\varepsilon$$
$$F = \alpha E - \beta D + \gamma C - \delta B + \varepsilon A - 6\zeta$$
etc.

Quae progreſſio cum facilem legem teneat, et ex terminis praecedentibus quiuis terminus expedite definiri poſſit, poterimus ſeriei ſuperioris valores ipſius $\frac{1}{\varepsilon}$ exhibentis ſummam poteſtatum quarumcunque terminorum definire.

§. 6. Antequam autem hanc generalem progreſſionem reliquamus, notari conueniet ſingularem proprietatem, quam valores litterarum A, B, C, D etc. interſe tenent. Oriuntur ii ſcilicet ex evolutione huius expreſſionis

$$\frac{\alpha - 2\beta z + 3\gamma z^2 - 4\delta z^3 + 5\varepsilon z^4 - 6\zeta z^5 + 7\eta z^6 - \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \zeta z^6 - \text{etc.}}$$

ſi quidem per diuiſionem actualem quotus ſecundum poteſtates ipſius z eruatur. Prodibit namque diuiſione conſueto more inſtituta ſequens quotus $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ etc. ita vt iſta ſeries aequalis ſit illi fractioni. Praeterea notandum eſt, ſi ſeriei $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 -$ etc. ſumma ponatur $= Z$, ita vt ſit Z denominator illius fractionis, fore numeratorem $= \frac{-dZ}{bz}$. Ex quo ſeriei $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. ſumma erit $= \frac{-dZ}{Zdz}$. Non ſolum itaque ex datis factis binorum, ternorum, quaternorum etc. ſummae poteſtatum ſeriei propoſitae $a + b + c + d +$ etc. ſcilicet valores litterarum A, B, C, D, etc. poterunt inueniri, ſed etiam ſumma ſeriei, quam hae ipſae poteſtates in nouam progreſſionem geometricam reſpecti-

ſpectiue ducti, nimirum huius ſeriei
$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. ſumma poterit aſſignari. Hancque proprietatem probe notaſſe in ſequentibus plurimum iuuabit, vbi in nouas ſeries ſumus inquiſituri.

§. 7. Cum igitur huius ſeriei:

$$\frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{etc.}\right)$$

dentur primo ipſorum terminorum ſumma, tum etiam ſummae factorum ex binis, ternis, quaternis et ita porro;

$$A = \frac{1}{1y}$$
$$B = \frac{A}{1y}$$
$$C = \frac{B}{1y} - \frac{1}{1\cdot 2y}$$
$$D = \frac{C}{1y} - \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3y}$$
$$E = \frac{D}{1\cdot y} - \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4y}$$
$$F = \frac{E}{1y} - \frac{C}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}$$
$$G = \frac{F}{1y} - \frac{D}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6y} \quad \text{etc.}$$

erit vt ſequitur

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \text{etc.} = \frac{A\pi}{n}$$
$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{n^2}$$
$$\frac{1}{m^3} + \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} + \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{n^3}$$
$$\frac{1}{m^4} + \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{n^4}$$
$$\frac{1}{m^5} + \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} + \text{etc.} = \frac{E\pi^5}{n^5}$$
$$\frac{1}{m^6} + \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(2n-m)^6} + \frac{1}{(2n+m)^6} + \text{etc.} = \frac{F\pi^6}{n^5}$$

etc.

vbi pro poteſtatibus paribus omnes termini habent ſignum $+$, pro imparibus vero ſigna conueniunt cum ſignis ipſius ſeriei primae.

§. 8. Retineant litterae A, B, C, D, E, etc. valores, quos ipſis modo tribuimus, ſitque nobis haec ſeries propoſita

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \text{ etc.}$$

cuius ſummam ex regula §. 6 data inueſtigemus. Huius autem ſeriei ſumma inde eſt $= \frac{-dZ}{Zdz}$ exiſtente $Z = 1 - \frac{z}{1y} + \frac{z^3}{1.2.3y} - \frac{z^5}{1.2\ldots5y} + \frac{z^7}{1.2\ldots7y} - \text{etc.} = 1 - \frac{1}{y}\,\text{ſin. A}\,.\,z$. Ex quo ob y hoc loco conſtans ponendum erit $dZ = \frac{-dz\,\text{coſ.A}z}{y}$ ac propterea ſumma ſeriei propoſitae

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc}$$

erit $= \frac{\text{coſ. A}\,.\,z}{y - \text{ſin.A}z}$. Hinc erit iſtius ſeriei ſumma $Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc} = \frac{z\,\text{coſ. A}\,.\,z}{y - \text{ſin. A}\,z}$.

§. 9. Sit $z = \frac{p\pi}{n}$, exprimet haec ſeries ſummam omnium harum ſerierum:

$$+\frac{p}{m} + \frac{p}{n-n} - \frac{p}{n+m} - \frac{p}{2n-m} + \frac{p}{2n+m} + \text{etc.}$$

$$+\frac{p^2}{m^2} + \frac{p^2}{(n-m)^2} + \frac{p^2}{(n+m)^2} + \frac{p^2}{(2n-m)^2} + \frac{p^2}{(2n+m)^2} + \text{etc.}$$

$$+\frac{p^3}{m^3} + \frac{p^3}{(n-m)^3} - \frac{p^3}{(n+m)^3} - \frac{p^3}{(2n-m)^3} + \frac{p^3}{(2n+m)^3} + \text{etc.}$$

etc.

Hae autem ſeries verticaliter additae dant

$$\frac{p}{m-p} + \frac{p}{n-m-p} - \frac{p}{n+n+p} - \frac{p}{2n-m+p} + \frac{p}{2n+m-p} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei igitur ſumma eſt $= \frac{p\pi\,\text{coſ. A}\,.\,\frac{p\pi}{n}}{ny - n\,\text{ſin. A}\,.\,\frac{p\pi}{n}}$ ſeu cum

y ſit

y ſit ſinus arcus $\frac{m\pi}{n}$, habebitur iſtius ſeriei ſumma

$$= \frac{p\pi \operatorname{coſ}. A . \frac{p\pi}{n}}{n \operatorname{ſin}. A \frac{m\pi}{n} - n \operatorname{ſin}. A . \frac{p\pi}{n}}.$$ Quod ſi ponatur $m - p = a$ et $m + p = b$ ita vt ſit $m = \frac{a+b}{2}$ et $p = \frac{b-a}{2}$ prodibit huius ſeriei

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{n-b} - \frac{1}{n+b} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \frac{1}{3n-b} - \frac{1}{3n+b} - \text{etc.}$$

ſiue huius

$$\frac{1}{a} + \frac{2b}{n^2-b^2} - \frac{2a}{4n^2-a^2} + \frac{2b}{9n^2-b^2} - \frac{2a}{16n^2-a^2} + \frac{2b}{25n^2-b^2} - \text{etc.}$$

ſumma $= \dfrac{\pi \operatorname{coſ}. A \frac{(b-a)\pi}{2n}}{n \operatorname{ſin}. A . \frac{(b+a)\pi}{2n} - n \operatorname{ſin}. A \frac{(b-a)\pi}{2n}}$

§. 10. Verum haec nimis ſunt generalia, vt difficulter omnia, quae in iis comprehenduntur, perſpici queant. Quamobrem ad ſpecialiora deſcendamus, ac ponamus ſinum $y =$ ſinui toti $= 1$: erit $m = 1$ et $n = 2$. Hinc igitur ſequentes nanciſcimur ſeries

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \text{etc.} = \frac{A\pi}{2}$$
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{2^2}$$
$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{2^3}$$
$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{2^4}$$

etc.

ſeu hae

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{A\pi}{2^2}$$
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{2^3}$$
$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{2^4}$$
$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{2^5}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{etc.} = \frac{E\pi^5}{2^6}$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} = \frac{F\pi^6}{2^7}$$
$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{etc.} = \frac{G\pi^7}{2^8}$$
$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = \frac{H\pi^8}{2^9}$$
etc.

Valores autem litterarum A. B, C, D etc. ex ſequenti lege inuenientur.

$$A = 1$$
$$B = \frac{A}{1}$$
$$C = \frac{B}{1} - \frac{1}{1\cdot2}$$
$$D = \frac{C}{1} - \frac{A}{1.2.3}$$
$$E = \frac{D}{1} - \frac{B}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$$
$$F = \frac{E}{1} - \frac{C}{1.2.3} + \frac{A}{1.2.3.4.5}$$
$$G = \frac{F}{1} - \frac{D}{1.2.3} + \frac{B}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2\ldots6}$$
$$H = \frac{G}{1} - \frac{E}{1.2.3} + \frac{C}{1.2.3.4.5} - \frac{A}{1.2\ldots7}.$$
etc.

vnde reperiuntur ſequentes valores litterarum

$$A = 1 \cdot \frac{\pi}{2^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$
$$B = \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^2}{2^3} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$
$$C = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{\pi^3}{2^4} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.}$$
$$D = \frac{2}{1.2.3} \cdot \frac{\pi^4}{2^5} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}$$
$$E = \frac{5}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^5}{2^6} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \text{etc.}$$
$$F = \frac{16}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\pi^6}{2^7} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}$$
$$G = \frac{61}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{\pi^7}{2^8} = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \text{etc.}$$
$$H = \frac{272}{1.2.3\ldots7} \cdot \frac{\pi^8}{2^9} = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.}$$

I =

$$I = \frac{1385}{1.2.3\ldots..8} \cdot \frac{\pi^9}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \text{etc.}$$

$$K = \frac{7936}{1.2.3\ldots.9} \cdot \frac{\pi^{10}}{2^{11}} = 1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{etc.}$$

$$L = \frac{50521}{1.2.3\ldots.10} \cdot \frac{\pi^{11}}{2^{12}} = 1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{7^{11}} + \text{etc.}$$

$$M = \frac{353792}{1.2.3\ldots.11} \cdot \frac{\pi^{12}}{2^{13}} = 1 + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \text{etc.}$$

$$N = \frac{2702765}{1.2.3\ldots.12} \cdot \frac{\pi^{13}}{2^{14}} = 1 - \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{5^{13}} + \frac{1}{7^{13}} + \text{etc.}$$

$$O = \frac{22368256}{1.2.3\ldots..13} \cdot \frac{\pi^{14}}{2^{15}} = 1 + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \frac{1}{7^{14}} \ \text{etc.}$$

§. 11. Denotant hic litterae A, B, C, etc. numerales tantum coefficientes poteſtatum π per poteſtates binarii diuiſarum: quarum valores etſi ſatis commode ex lege data definiri poſſunt, tamen alia lex poteſt exhiberi, quae magis ad calculum videtur expedita. Conſidero ſcilicet ſeriem $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. cuius ſumma, quae tantisper deſignetur littera s, eſt per §. 8. $= \frac{cof. A.z}{1 - ſin. AZ}$, ob $y = 1$. Quod ſi igitur ex hac aequatione $s = \frac{cof. A.z}{1 - ſin. A.z}$ valor ipſius s in ſerie exprimatur, quae ſecundum poteſtates ipſius z progrediatur, prodire debebit ipſa ſeries $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. Nulla enim alia ſeries ſimilis formae puta $P + Qz + Rz^2 + Sz^3$ + etc. aſſignari poteſt aequalis illi $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc quin ſimul coefficientes poteſtatum z congruant, ſitque $P = A$; $Q = B$; $R = C$; $S = D$, etc. At vero exprimit $\frac{cof. A z}{1 - ſin. Az}$ tangentem arcus $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}$ ſeu erit $s = tang. A (\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2})$ et hancobrem conuertendo $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} = A\,tang.\ s = \int \frac{ds}{1 + ss}$ ſumtisque differentialibus ob $\frac{\pi}{4}$ conſtans ſeu arcum 45 graduum, habebitur $\frac{dz}{2} = \frac{ds}{1 + ss}$ ſiue $dz + ssdz = 2ds$. Nunc ponatur $s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. erit

 $2ds$

$$\frac{2ds}{dz} = 2B + 4Cz + 6Dz^2 + 8Ez^3 + 10Fz^4 + \text{etc.}$$
$$ss = A^2 + 2ABz + 2ACz^2 + 2ADz^3 + 2AEz^4 + \text{etc.}$$
$$1 = +1 \qquad + B^2z^2 + 2BCz^3 + 2BDz^4 + \text{etc.}$$
$$+ C^2z^4 + \text{etc.}$$

Comparatis nunc terminis homogeneis inter ſe valores litterarum ita definiantur, vt coefficientes ſingularum poteſtatum ipſius z euaneſcant; atque ſequentes litterarum A, B, C, D, E, etc. obtinebuntur determinationes, exiſtente vt iam inuenimus $A = 1$.

$$A = 1$$
$$B = \frac{A^2+1}{2}$$
$$C = \frac{2AB}{4}$$
$$D = \frac{2AC+B^2}{6}$$
$$E = \frac{2AD+2BC}{8}$$
$$F = \frac{2AE+2BD+C^2}{10}$$
$$G = \frac{2AF+2BE+2CD}{12}$$
$$H = \frac{2AG+2BF+2CE+D^2}{14}$$
etc.

Atque hinc eaedem prorſus determinationes litterarum A, B, C, D etc. prodibunt, quas altera lex ſupra data §. 10 ſuppeditat.

§. 12. Cum denominatores fractionum, quibus litterae A, B, C, D, etc. aequales ſunt inuentae, ſatis regulariter progrediantur, poteſt hinc peculiaris regula ad inueniendos numeratores reperiri: Ponamus enim

A =

$$\begin{array}{ll|ll}
A = \alpha & & F = \frac{\zeta}{1.2.3.4.5} & \\
B = \frac{\beta}{1} & & G = \frac{\eta}{1.2.3.4.5.6} & \\
C = \frac{\gamma}{1.2} & & H = \frac{\theta}{1.2.3\ldots\ldots7} & \\
D = \frac{\delta}{1.2.3} & & I = \frac{\iota}{1.2.3\ldots\ldots8} & \\
E = \frac{\varepsilon}{1.2.3.4} & & K = \frac{\varkappa}{1.2.3\ldots\ldots9} & \text{etc.}
\end{array}$$

eritque factis ſubſtitutionibus haec lex:

$$\begin{array}{l|l}
\alpha = 1 & \varepsilon = \alpha\delta + 3\beta\gamma \\
\beta = \frac{\alpha^2+1}{2} & \zeta = \alpha\varepsilon + 4\beta\delta + 3\gamma^2 \\
\gamma = \alpha\beta & \eta = \alpha\zeta + 5\beta\varepsilon + \frac{5.4}{1.2}\gamma\delta \\
\delta = \alpha\gamma + \beta^2 & \theta = \alpha\eta + 6\beta\zeta + \frac{6.5}{1.2}\gamma\varepsilon + \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{\delta^2}{2}
\end{array}$$

$$\iota = \alpha\theta + 7\beta\eta + \frac{7.6}{1.2}\gamma\zeta + \frac{7.6.5}{1.2.3}\delta\varepsilon$$

$$\varkappa = \alpha\iota + 8\beta\theta + \frac{8.7}{1.2}\gamma\eta + \frac{8.7.6}{1.2.3}\delta\zeta + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Lex haec perſpicua eſt, ſi hoc modo notetur, quoties poſtremus terminus ſit quadratum, eum inſuper per binarium diuidi debere.

§. 13. Conſideremus nunc hanc ſeriem:
$A z + B z^2 + G z^3 + D z^4 + E z^5 +$ etc.
cuius ſummam conſtat eſſe $= \frac{z\,coſ.A.z}{1-ſin.A.z}$, ac ponatur

$z = \frac{p\pi}{2}$, erit $\frac{p\pi\,coſ.\,A\,.\,\frac{p\pi}{2}}{2-2ſin.A\,.\,\frac{p\pi}{2}} =$

$\frac{A\pi}{2^2}\cdot 2p + \frac{B\pi^2}{2^3}\cdot 2p^2 + \frac{C\pi^3}{2^4}\cdot 2p^3 + \frac{D\pi^4}{2^5}\cdot 2p^4 +$ etc.

ſeu $\frac{\pi\,coſ.\,A\,\frac{p\pi}{2}}{4-4ſin.A\,.\,\frac{p\pi}{2}} = \frac{A\pi}{2^2} + \frac{pB\pi^2}{2^3} + \frac{p^2C\pi^3}{2^4} + \frac{p^3D\pi^4}{2^5} +$ etc.

Quodſi ergo loco ſingulorum terminorum ſubſtituantur ſeries

ries ex §. 10 prodibit $\frac{\pi\, coſ.\, A.\frac{p\pi}{2}}{4-4\, ſin.\, A.\frac{p\pi}{2}} =$

$$+1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \text{etc.}$$
$$+p + \tfrac{p}{3^2} + \tfrac{p}{5^2} + \tfrac{p}{7^2} + \tfrac{p}{9^2} + \text{etc.}$$
$$+p^2 - \tfrac{p^2}{3^3} + \tfrac{p^2}{5^3} + \tfrac{p^2}{7^3} + \tfrac{p^2}{9^3} - \text{etc.}$$
$$+p^3 + \tfrac{p^3}{3^4} + \tfrac{p^3}{5^4} + \tfrac{p^3}{7^4} + \tfrac{p^3}{9^4} + \text{etc.}$$
etc.

Omnes autem hae ſeries deorſum additae abeunt in hanc:

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{3+p} + \frac{1}{5-p} - \frac{1}{7+p} + \frac{1}{9-p} - \text{etc.}$$

cuius adeo ſumma eſt $= \frac{\pi\, coſ.\, A.\frac{p\pi}{2}}{4-4\, ſin.\, A.\frac{p\pi}{2}}$.

§. 14. Plures huius generis ſeries ſummabiles derivare licebit ex §. 9. ſerie ſub finem expoſita. Ponamus $a = b = m$: et habebimus hanc

$$\frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} + \frac{2m}{25n^2-m^2} - \text{etc.}$$

cuius ſumma erit $= \frac{\pi}{n\, ſin.\, A.\frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{m}$ ob $coſ.\, A.\, 0\pi = 1$ et $ſin.\, A.\, 0\pi = 1$. Quamobrem habebitur, ſi per $2m$ diuidatur

$$\frac{1}{n^2-m^2} - \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} - \frac{1}{16n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} - \text{etc.}$$

$= \frac{\pi}{2mn\, ſin.\, A.\frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{2mm}$. Ponamus porro $a = -m$ et $b = +m$, ac proueniet $-\frac{\pi\, coſ.\, A.\frac{m\pi}{n}}{n\, ſin.\, A.\frac{m\pi}{n}} + \frac{1}{m} =$

$$\frac{2m}{n^2-m^2} + \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} + \frac{2m}{16n^2-m^2} + \frac{2m}{25n^2-m^2} + \text{etc.}$$

ſeu

ſeu facta diuiſione per 2 m, erit $\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi\, coſ\, A\,.\, \frac{m\pi}{n}}{2mn\, ſin.\, A\,.\, \frac{m\pi}{n}}$

$$= \frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} + \text{etc.}$$

Quoties itaque euenit vt $coſ.\, A\,.\, \frac{m\pi}{n}$ euaneſcat, toties ſeriei ſumma algebraice erit aſſignabilis quippe $= \frac{1}{2m^2}$. Fit autem hoc, ſi fuerit $\frac{m}{n} = \frac{2i+1}{2}$ ſeu $m = 2i+1$, et $n = 2$ vnde erit:

$$\frac{1}{2(2i+1)^2} = \frac{1}{4-(2i+1)^2} + \frac{1}{16-(2i+1)^2} + \frac{1}{36-(2i+1)^2} + \frac{1}{64-(2i+1)^2}\ \text{etc.}$$

Ex quo ſequens oritur propoſitio paradoxa: eſſe ſcilicet

$$\frac{1}{4-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{36-p} + \frac{1}{64-p} + \frac{1}{100-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p}$$

quoties fuerit p numerus quadratus integer et impar.

§. 15. Ponamus $n = 1$, atque $m^2 = p$, erit

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{2p\, ſin\cdot A\cdot\pi\sqrt{p}} - \frac{1}{2p}$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}\, coſ\cdot A\cdot\pi\sqrt{p}}{2p\, ſin\cdot A\,.\,\pi\sqrt{p}}$$

quae ſeries ſi addantur ſequitur fore:

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}\, ſin\cdot v A.\pi\sqrt{p}}{4p\, ſin\cdot A\cdot\pi\sqrt{p}}$$

at ſi eaedem a ſe inuicem ſubtrahantur; erit

$$\frac{1}{4-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{36-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}(1+coſ.\, A\,.\,\pi\sqrt{p})}{4p\, ſin\cdot A\cdot\pi\sqrt{p}}$$

At eſt $\frac{ſin\, v A.\pi\sqrt{p}}{ſin\cdot A\cdot\pi\sqrt{p}} = \text{tang. } A.\, \frac{\pi\sqrt{p}}{2}$ et $\frac{1+coſ.A\pi\sqrt{p}}{ſin\, A\pi\sqrt{p}} = \text{coſ. } A.\frac{\pi\sqrt{p}}{2}$ ex quo ſummae poſteriores ſimpliciores reddentur.

§. 16. Poſſumus itaque hinc ſummare ſequentes ſeries $\frac{1}{1-p} \pm \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} \pm \frac{1}{16-p} +$ etc. ſi quidem p ſignificet numerum affirmatiuum quemcunque. At ſi loco p ſubſtituatur numerus negatiuus puta $-q$, tum fiunt tam ſinus et coſinus, quam ipſi arcus $\pi\sqrt{p}$ ſeu $\pi\sqrt{-q}$ quantitates imaginariae. Cum autem ſummae ſerierum nihilo

minus maneant reales et finitae, imaginaria ſeſe deſtruent. Quamobrem inueſtigari conueniet, cuiusmodi quantitates reales in his formis $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\mathit{ſin}.\,A\,\pi\sqrt{-q}}$ et $\frac{\pi\sqrt{-q}}{tang.\,A.\,\pi\sqrt{-q}}$ contineantur. Ad hoc ponamus $u = \frac{\pi\sqrt{-q}}{\mathit{ſin}\,A.\,\pi\sqrt{-q}}$ eritque $\mathit{ſin}.\,A.\,\pi\sqrt{-q} = \frac{\pi\sqrt{-q}}{u}$ et $\pi\sqrt{-q} = A\,\mathit{ſin}.\,\frac{\pi\sqrt{-q}}{u}$; ſumantur differentialia poſitis π et u variabilibus, habebitur $d\pi = \frac{ud\pi - \pi - \pi du}{u\sqrt{(uu + q\pi^2)}}$. Ponatur $u = \pi v$, prodibit $d\pi = \frac{-dv}{v\sqrt{(q + vv)}}$ et $\pi = \frac{1}{\sqrt{q}}$ $l\,\frac{\sqrt{} + \sqrt{(q + vv)}}{cv}$. Hinc erit $e^{\pi\sqrt{q}}c\,v = \sqrt{q} + \sqrt{(q + vv)}$ et $v = \frac{2\,e^{\pi\sqrt{q}}c\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}c^2 - 1}$ atque $u = \frac{2\,\pi\,e^{\pi\sqrt{q}}c\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}c^2 - 1}$. Conſtans autem c ita debet eſſe comparata vt facto $\pi = 0$ fiat $u = 1$ ex quo fit $c = 1$ Quamobrem erit $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\mathit{ſin}.\,A.\,\pi\sqrt{-q}} = \frac{2\,e^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}$. Simili modo ponatur $\frac{\pi\sqrt{-q}}{tang.\,A\,\pi\sqrt{-q}} = \frac{\pi}{v}$ erit $v\sqrt{-q} = tang.\,A.\sqrt{-q}$ et $\pi\sqrt{-q} = A\,tang.\,v\sqrt{-q}$ ac differentiando $d\pi = \frac{dv}{1 - qvv}$. Integretur denuo, erit $\pi = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,l\,\frac{1 + v\sqrt{q}}{1 - v\sqrt{q}}$ et $e^{2\pi\sqrt{q}} - e^{2\pi\sqrt{q}}v\sqrt{q} = 1 + v\sqrt{q}$, vnde fit $v = \frac{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\sqrt{q}}$ atque

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{tang.\,A.\,\pi\sqrt{-q}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}.$$

§. 17. Nacti igitur ſumus octo ſequentes ſeries, quarum ſummae aſſignari poſſunt, quas cum ſummis conſpectui exponemus

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} - \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} - \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{2p\,\mathit{ſin}.\,A.\,\pi\sqrt{p}} - \frac{1}{2p}$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{2p\,tang.\,A.\,\pi\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{25-p} + \frac{1}{49-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{4p\,\mathit{coſ}.\,A.\,\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$$

$$\frac{1}{4-p}+\frac{1}{16-p}+\frac{1}{36-p}+\frac{1}{64-p}+\text{etc.}=\frac{1}{2p}-\frac{\pi\sqrt{p}}{4p\,tang.\,A.\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$$

$$\frac{1}{1+q}-\frac{1}{4+q}+\frac{1}{9+q}-\frac{1}{16+q}+\text{etc.}=\frac{1}{2q}-\frac{e^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)q}$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{1}{4+q}+\frac{1}{9+q}+\frac{1}{16+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{2\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{2(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)q}-\frac{1}{2q}$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{1}{9+q}+\frac{1}{25+q}+\frac{1}{49+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{q}}-1)\pi\sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}}+1)q}$$

$$\frac{1}{4+q}+\frac{1}{16+q}+\frac{1}{36+q}+\frac{1}{64+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}}-1)q}-\frac{1}{2q}$$

§. 18. Cum ſupra legem exhibuerim, qua ſummae poteſtatum omnium terminorum huius ſeriei

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}$$

progrediuntur, inueſtigabo nunc legem, quam poteſtates impares tantum inter ſe tenent, quo hae ſummae ſine cognitione parium, quousque libuerit, continuari poſſint; ſit itaque

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}=A\,\pi$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{etc.}=B\,\pi^3$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\text{etc.}=C\,\pi^5$$

$$1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}-\text{etc.}=D\,\pi^7$$

$$1-\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}-\frac{1}{7^9}+\frac{1}{9^9}-\text{etc.}=E\,\pi^9$$

etc.

atque inueſtiganda erit lex, qua coefficientes A, B, C, D etc. progrediuntur. Hunc in finem conſidero hanc ſeriem $A\pi z+B\pi^3z^3+C\pi^5z^5+D\pi^7z^7+$ etc. cuius ſumma ſit $=s$; erit ergo his ſeriebus per reſpondentes poteſtates ipſius z multiplicatis reſpectiue:

$s = \frac{z}{1-zz} - \frac{3z}{9-zz} + \frac{5z}{25-zz} - \frac{7z}{49-zz} +$ etc. et
$\frac{2s}{z} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} + \frac{1}{5+z}$ etc.
Cum autem ex §. 9. ſit $\frac{\pi \operatorname{coſ.} A \frac{(b-a)\pi}{2n}}{n \operatorname{ſin.} A . \frac{(b+a)\pi}{2n} - n \operatorname{ſin.} A . \frac{(b-a)\pi}{2n}} =$
$\frac{1}{a} + \frac{1}{n-b} - \frac{1}{n+b} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \frac{1}{3n-b} - \frac{1}{3n+b} -$ etc.
fiat $a = 1 - z$; $n = 2$; et $b = 1 - z$; atque haec ſeries tranſibit in illam; ex quo prodibit
$\frac{2s}{z} = \frac{\pi}{2 \operatorname{ſin.} A . \frac{(1-z)\pi}{1}}$ et $s = \frac{\pi z}{4 \operatorname{ſin.} A . \frac{(1-z)\pi}{2}}$ ſiue $s =$

$$\frac{\pi z}{4 \operatorname{coſ.} A . \frac{\pi z}{2}} = \frac{\frac{\pi z}{4}}{\frac{1-\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \; 4.} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 . 3 \cdot 4 . \; 2^4} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^6} + \text{etc.}}$$

quae fractio cum, ſi actu diuidatur, ipſam aſſumtam ſeriem $A\pi z + B\pi^3 z^3 + C\pi^5 z^5 +$ etc. reproducere debeat, erit:

$A = \frac{1}{4}$
$B = \frac{A}{2 \cdot 4}$
$C = \frac{B}{2 \cdot 4} - \frac{A}{2.4.6.8}$
$D = \frac{C}{2 \cdot 4} - \frac{B}{2.4.6.8.} + \frac{A}{2.4.6.8.10.12}$
$E = \frac{D}{2 \cdot 4} - \frac{C}{2.4.6.8.} + \frac{B}{2.4.6.8.10.12} - \frac{A}{2.4.6 \ldots 16}$
etc.

§. 19. Vel ſi ponatur:
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc $= \frac{A\pi}{2^2}$
$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} +$ etc. $= \frac{B\pi^3}{2^4}$
$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} +$ etc. $= \frac{C\pi^5}{2^6}$
$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} +$ etc. $= \frac{D\pi^7}{2^8}$
etc.

coeffi-

coefficientes A, B, C, etc. hanc tenebunt legem:

$$A = 1$$
$$B = \frac{A}{1.2}$$
$$C = \frac{B}{1.2} - \frac{A}{1.2.3.4}$$
$$D = \frac{C}{1.2} - \frac{B}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.\ldots.6}$$
$$E = \frac{D}{1.2} - \frac{C}{1.2.3.4} + \frac{B}{1.2.\ldots.6} - \frac{A}{1.2.\ldots.8}$$

Quodſi autem illae ſeries retro continuentur, vt ad poteſtates affirmatiuas deueniatur, erunt omnium illarum ſerierum ſummae $= 0$; ita vt etiamſi in his formis vlterius progrederemur, tamen alii valores non prodituri eſſent. Eſt ſcilicet

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \text{etc.} = 0$$
$$1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc.} = 0$$
$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - \text{etc.} = 0$$
$$1 - 3^7 + 5^7 - 7^7 + 9^7 - \text{etc.} = 0$$

§. 20. Quemadmodum autem ſummae poteſtatum imparium peculiarem inter ſe tenent progreſſionis legem, ita etiam poteſtates pares ſimili proprietate gaudent, vt omnes ex ſe ipſis ſine ſubſidio poteſtatum imparium definiri queant. Quam legem vt eruamus, ſimili vtamur operatione. Sit igitur

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = A\pi^2$$
$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = B\pi^4$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} = C\pi^6$$
$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = D\pi^8$$

ac inueſtigetur ſumma huius ſeriei:

$$A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.} = s,$$

erit $s = \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^2}{9-z^2} + \frac{z^2}{25-z^2} + \frac{z^2}{49-z^2} + \text{etc.}$ vnde ex

I 3 §. 17.

§. 17. fiet $s = \frac{\pi z}{4 \operatorname{coſ.} A \frac{\pi z}{2}}$; ſiue per ſeriem

$$s = \frac{\frac{\pi^2 z^2}{1.2^3} - \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.2^5} + \frac{\pi^6 z^6}{1.2.3.4.5.2^7} - \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2.2^2} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4.2^4} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2.3.4.5.6.2^6} + \text{etc.}}$$

ex qua diuiſione cum ipſa ſeries aſſumta oriri debeat, erit

$$A = \tfrac{1}{8}$$
$$B = \tfrac{A}{2.4} - \tfrac{1}{2.4.6.4}$$
$$C = \tfrac{B}{2.4} - \tfrac{A}{2.4.6.8} + \tfrac{1}{2.4.6.8.10.4}$$
$$D = \tfrac{C}{2.4} - \tfrac{B}{2.4.6.8} + \tfrac{A}{2.4.6\ldots12} - \tfrac{1}{2.4\ldots14.4}$$

etc.

§. 21. Lex haec facilius inſpicietur, ſi ponatur

$$1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.} = A\,\tfrac{\pi^2}{2^3}$$
$$1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.} = B\,\tfrac{\pi^4}{2^5}$$
$$1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc.} = C\,\tfrac{\pi^6}{2^7}$$
$$1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc.}\ D\,\tfrac{\pi^8}{2^9}$$

etc.

Hic enim coefficientes A, B, C etc. ſequentem tenebunt progreſſionem:

$$A = 1$$
$$B = \tfrac{A}{1.2} - \tfrac{1}{1.2.3}$$
$$C = \tfrac{B}{1.2} - \tfrac{A}{1.2.3.4} + \tfrac{1}{1.2.3.4.5}$$
$$D = \tfrac{C}{1.2} - \tfrac{B}{1.2.3.4} + \tfrac{A}{1.2.3.4.5.6} - \tfrac{1}{1.2\ldots7}$$

etc.

Quodſi ergo fingatur ſeries haec: $s = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 +$ etc. erit

$$s = \frac{z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2\ldots7} + \text{etc.}}{1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3\ldots6} + \text{etc.}}$$

atque

atque hinc $s =$ tang A. z, ſeu $z =$ tang. s. Habebimus ergo $dz = \frac{ds}{1+ss}$ et $dz + ssdz = ds$ cui aequationi cum ſatisfacere debeat valor hic

$$s = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{etc.}$$

ſubſtituantur valores loco ds et ss, eritque

$$\begin{array}{ll}
\frac{ds}{dz} = & A + 3Bz^2 + 5Cz^4 + 7Dz^6 + 9Ez^8 + \text{etc.} \\
ss = & \quad + A^2z^2 + 2ABz^4 + 2ACz^6 + 2ADz^8 + \text{etc.} \\
 & \qquad\qquad\qquad + B^2z^6 + 2BCz^8 + \text{etc.} \\
1 = & 1
\end{array}$$

Hinc itaque formatis aequationibus aliae ſequentes prodibunt determinationes litterarum A, B, C, D, etc.

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
B &= \frac{A^2}{3} \\
C &= \frac{2AB}{5} \\
D &= \frac{2AC + B^2}{7} \\
E &= \frac{2AD + 2BC}{9} \\
F &= \frac{2AE + 2BD + C^2}{11} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

§. 22. Ab his ſeriebus poteſtatum parium pendent ſummae ſerierum ſub hac forma generali contentarum

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

denotante n numerum parem. Quodſi enim fuerit

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.} = N\pi^n$$

erit $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.} = \frac{2^n N \pi^n}{2^n - 1}$

vnde omnium harum ſerierum dummodo ſit n numerus

par,

par, ſummae per quadraturam circuli poterunt inueniri, atque ex iam inuentis ſummis ſimilium poteſtatum parium pro numeris imparibus ſolis. Verum vt hae ſummae directe inueniri queant, in legem peculiarem qua iſtae ſummae progrediuntur, inquiramus. Sit itaque

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = A\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = B\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc} = C\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = D\pi^8$$

etc.

ac contemplabor hanc ſeriem: $s =$
$A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + E\pi^{10} z^{10} + \text{etc.}$
quae ſubſtitutis loco $A\pi^2$, $B\pi^4$, $C\pi^6$, etc. ſeriebus quas denotant, additisque terminis homologis, prodibit

$$s = \frac{zz}{1-zz} + \frac{zz}{4-zz} + \frac{zz}{9-zz} + \frac{zz}{16-zz} + \frac{zz}{25-zz} + \text{etc.}$$

quae ſeries per §. 17. ſummata dat $s = \frac{1}{2} - \frac{\pi z}{2\,tang\,A.\,\pi z}$ vel ſi tangens arcus πz per ſeriem exprimatur:

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2\ldots7} + \text{etc.}}$$

$$s = \frac{\frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} - \frac{2\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} + \frac{3\pi^6 z^6}{1.2\ldots7} - \frac{4\pi^8 z^8}{1.2\ldots9} + \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2\ldots7} + \frac{\pi^8 z^8}{1.2\ldots9} - \text{etc.}}$$

qua expreſſione euoluta, cum ipſam ſeriem aſſumtam $A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.}$ praebere debeat, ſequentur hae coefficientium determinationes

$$A = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{2}{1.2.3.4.5}$$

$$C = \frac{B}{1.2.3} - \frac{A}{1.2.3.4.5} + \frac{3}{1.2\ldots7}$$

$$D = \frac{C}{1.2.3} - \frac{B}{1.2.3.4.5} + \frac{A}{1.2\ldots7} - \frac{4}{1.2\ldots9}$$

etc.

§. 23.

§. 23. At pro iisdem his coefficientibus alia lex progreſſionis poteſt exhiberi, cuius ope eos multo expeditius reperire licebit. Cum enim ſit $s = \frac{1}{2} - \frac{\pi z}{2\,\text{tang.}\,A\,\pi z}$ erit $\text{tang.}\,A.\,\pi z = \frac{\pi z}{1-2s}$ et $\pi z = A\,\text{tang.}\,\frac{\pi z}{1-2s}$; ponatur $\pi z = u$, erit $u = A\,\text{tang.}\,\frac{u}{1-2s}$ et differentiando $du = \frac{du - 2s\,du + 2u\,ds}{1 - 4s + 4ss + uu}$ vel $uu\,du + 4ss\,du = 2s\,du + 2u\,ds$: cui aequationi ſatisfacit valor hic $s = Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + Eu^{10} +$ etc. quo ſubſtituto fiet

$$uu = uu$$

$$\begin{aligned} 4ss = {} & 4A^2u^4 + 8ABu^6 + 8ACu^8 + 8ADu^{10} + 8AFu^{12} \\ & + 4B^2u^8 + 8BCu^{10} + 8BDu^{12} \\ & + 4C^2u^{12} \end{aligned}$$

$$2s = 2Au^2 + 2Bu^4 + 2Cu^6 + 2Du^8 + 2Eu^{10} + 2Fu^{12}$$

$$\frac{2uds}{du} = 4Au^2 + 8Bu^4 + 12Cu^6 + 16Du^8 + 20Eu^{10} + 24Fu^{12}$$

vnde ſequentes conſequuntur determinationes:

$A = \frac{1}{6}$	$E = \frac{4AD + 4BC}{11}$
$B = \frac{2A^2}{5}$	$F = \frac{4AE + 4BD + 2C^2}{13}$
$C = \frac{4AB}{7}$	$G = \frac{4AF + 4BE + 4CD}{15}$
$D = \frac{4AC + 2B^2}{9}$	$H = \frac{4AG + 4BF + 4CE + 2D^2}{17}$

etc.

§. 24. Ipſae autem huiusmodi ſerierum ſummae, quousque quidem eas ſupputaui, ſequentes ſunt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{2^5}{1\cdot 2\cdots 7}\cdot\frac{1}{6}\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{2^7}{1\cdot 2\cdots 9}\cdot\frac{3}{10}\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{2^9}{1\cdot 2 \cdots 11} \cdot \frac{5}{6}\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{2^{11}}{1\cdot 2 \cdots 13} \cdot \frac{691}{210}\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \text{etc.} = \frac{2^{13}}{1\cdot 2 \cdots 15} \cdot \frac{35}{2}\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \text{etc.} = \frac{2^{15}}{1\cdot 2 \cdots 17} \cdot \frac{3617}{30}\pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \text{etc.} = \frac{2^{17}}{1\cdot 2 \cdots 19} \cdot \frac{43867}{42}\pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \text{etc.} = \frac{2^{19}}{1\cdot 2 \cdots 21} \cdot \frac{1222277}{110}\pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \text{etc.} = \frac{2^{21}}{1\cdot 2 \cdots 23} \cdot \frac{854513}{6}\pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \text{etc.} = \frac{2^{23}}{1\cdot 2 \cdots 25} \cdot \frac{1181820455}{546}\pi^{24}$$

In his expreſſionibus fractionum mediarum tantum lex non eſt manifeſta, reliquae partes vero perſpicue progrediuntur. Cum autem iſtas fractiones medias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$ etc. attentius eſſem contemplatus, easdem deprehendi occurrere in expreſſione generali, quam olim tradidi pro ſumma cuiuscunque ſeriei ex dato termino generali inueniendа, ita vt alterius expreſſionis ope altera poſſit confici.

§. 25. Operae pretium igitur erit in conſenſum harum duarum expreſſionum inter ſe tantopere diuerſarum diligentius inquirere. Altera quidem expreſſio quam pro ſummatione ſerierum dedi, ita ſe habet: ſi ſeriei cuiuscunque terminus generalis, ſeu is qui reſpondet exponenti indefinito numerico x fuerit $= X$; et ſumma ſeriei a termino primo vsque ad hunc X incluſiue ponatur $= S$, erit S $=$

$$\int X dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2dx} - \frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^3}$$
$$+ \frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6dx^5} - \frac{3d^7X}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots 9\cdot 10\,dx^7} + \frac{5d^9X}{1\cdot 2 \cdots 11\cdot 6dx^9}$$
$$- \frac{691d^{11}X}{1\cdot 2 \cdots 13\cdot 210\,dx^{11}} + \frac{35d^{13}X}{1\cdot 2 \cdots 15\cdot 2dx^{13}} - \frac{3617d^{15}X}{1\cdot 2 \cdots 17\cdot 30\,dx^{15}}$$

+

$$+ \frac{43867 d^{17} X}{1 \cdot 2 \cdot \cdots 19 \cdot 42 dx^{17}} - \frac{1222277 d^{19} X}{1 \cdot 2 \cdot \cdots 21 \cdot 110 dx^{19}}$$
$$+ \frac{854513 d^{21} X}{1 \cdot 2 \cdot \cdots 23 \cdot 6 dx^{21}} - \frac{1181820455 d^{23} X}{1 \cdot 2 \cdot \cdots 25 \cdot 546 dx^{23}} \text{ etc.}$$

in qua expreſſione apparet easdem omnino fractiones irregulares $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$, etc. ineſſe, quae ante in expreſſionibus ſummarum occurrerunt, hoc tantum diſcrimine, quod hic ſigna habeant alternantia, cum ibi omnia ſigno $+$ eſſent affectae. Atque hic ipſe conſenſus mihi hanc praeſtitit vtilitatem, vt iſtam generalem ſummae S expreſſionem eousque continuare potuerim, cum hoc per eam legem, quae tum temporis mihi pro iſtorum terminorum progreſſione inuenta erat, ſine multo maiore labore praeſtare non potuiſſem.

§. 26. Tametſi autem haec tanti conſenſus mera obſeruatio ſufficere poſſet, ad conſenſum in ſequentibus terminis, qui nondum conſtant, euincendum, tamen praeſtabit ex ipſa rei natura eandem conuenientiam eruere, vt ea non caſu, ſed neceſſario accidiſſe intelligatur. Hanc vero poſteriorem expreſſionem ſequenti modo ſum aſſecutus. Cum S denotet ſummam tot terminorum in ſerie quacunque, quot vnitates continentur in exponente x, vltimusque horum terminorum ſit $= X$: manifeſtum eſt, ſi in S ponatur $x - 1$ loco x, tum prodire debere ſummam eandem S vltimo termino minutam, ſeu $S - X$. At poſito $x - 1$ loco x quantitas S abibit in hanc:

$$S - \frac{dS}{1 \cdot dx} + \frac{ddS}{1 \cdot 2 dx^2} - \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.}$$

quae propterea aequalis eſt ipſi $S - X$; vnde habetur haec aequatio:

$$X = \frac{dS}{1 dx} - \frac{ddS}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} - \frac{d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{etc.}$$

Vt nunc ex hac aequatione S in X exprimatur, accipio hanc aequationem:

$$S = \int X\,dx + \alpha X + \frac{\beta dX}{dx} + \frac{\gamma ddX}{dx^2} + \frac{\delta d^3X}{dx^3} + \text{etc.}$$

cuius in illa facta ſubſtitutione habebitur

$$\begin{aligned} X = X &+ \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} + \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} \\ &- \frac{dX}{1\cdot 2dx} - \frac{\alpha ddX}{1\cdot 2dx^2} - \frac{\beta d^3X}{1\cdot 2dx^3} - \frac{\gamma d^4X}{1\cdot 2dx^4} \\ &\qquad + \frac{ddX}{1\cdot 2\cdot 3dx^2} + \frac{\alpha d^3X}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{\beta d^4X}{1\cdot 2\cdot 3dx^4} \\ &\qquad\qquad - \frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} - \frac{\alpha d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} \\ &\qquad\qquad\qquad + \frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5dx^5} \end{aligned}$$

§. 27. Ex hac aequalitate naſcuntur ſequentes coefficientium α, β, γ, δ, etc. determinationes.

$$\alpha = \frac{1}{1\cdot 2}$$
$$\beta = \frac{\alpha}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$\gamma = \frac{\beta}{1\cdot 2} - \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$\delta = \frac{\gamma}{1\cdot 2} - \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{1\cdot 2\cdots 5}$$
$$\varepsilon = \frac{\delta}{1\cdot 2} - \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 6}$$

etc.

atque ex formulis tum temporis valores harum litterarum definiui, idque multo labore. Neque, quod hic euenit, aliter niſi ſola obſeruatione cognoui valores alternos γ, ε, η, etc. euaneſcere. At ex principiis nunc ſtabilitis idem luculenter oſtendi poterit, ſi alia huius progreſſionis lex inveſtigetur. Conſidero ad hoc iſtam ſeriem:

$$s = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

eritque ex praecedente coefficientium lege:

$s =$

$$s = \cfrac{1}{1 - \frac{z}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.}}$$

quae aequatio abit in hanc $s = \frac{z}{1 - e^{-z}}$ ſeu $s = \frac{e^z z}{e^z - 1}$. Hinc oritur $e^z s - s = e^z z$ et $e^z = \frac{s}{s-z}$ atque $z = ls - l(s-z)$. Differentiando autem habebitur $dz = \frac{ds}{s} - \frac{ds + dz}{s - z}$ ſiue

$$ssdz - szdz = sdz - zds$$

cui aequationi ſatisfacere debet valor aſſumtus

$$s = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

ſubſtituatur itaque hic valor in hac aequatione

$$\frac{zds}{dz} - s - sz + ss = 0$$

atque obtinebitur:

$$\begin{array}{rcl} \frac{zds}{dz} & = & \quad + \alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + 5\varepsilon z^5 \\ -s & = & -1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \varepsilon z^5 \\ -sz & = & \quad - z - \alpha z^2 - \beta z^3 - \gamma z^4 - \delta z^5 \\ +s^2 & = & 1 + 2\alpha z + 2\beta z^2 + 2\gamma z^3 + 2\delta z^4 + 2\varepsilon z^5 \\ & & \qquad\quad + \alpha^2 \quad + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad + \beta^2 \quad + 2\beta\gamma \end{array}$$

Hinc igitur colligitur fore:

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \beta &= \frac{\alpha - \alpha^2}{3} \\ \gamma &= \frac{\beta - 2\alpha\beta}{4} \\ \delta &= \frac{\gamma - 2\alpha\gamma - \beta\beta}{5} \\ \varepsilon &= \frac{\delta - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma}{6} \\ \zeta &= \frac{\varepsilon - 2\alpha\varepsilon - 2\beta\delta - \gamma\gamma}{7} \\ \eta &= \frac{\zeta - 2\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon - 2\gamma\delta}{8} \end{aligned}$$

§. 28. Cum igitur ſit $\alpha = \frac{1}{2}$ erit $1 - 2\alpha = 0$, qui valor cum in omnibus terminis ſequentibus occurrat, erit:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}$$
$$\beta = \tfrac{1}{12}$$
$$\gamma = 0$$
$$\delta = -\tfrac{\beta\beta}{5}$$
$$\varepsilon = -\tfrac{2\beta\gamma}{6}$$
$$\zeta = -\tfrac{2\beta\delta - \gamma\gamma}{7}$$
$$\eta = -\tfrac{2\beta\varepsilon - 2\gamma\delta}{8}$$
$$\theta = -\tfrac{2\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon - \delta\delta}{9}$$
$$\iota = -\tfrac{2\beta\eta - 2\gamma\zeta - 2\delta\varepsilon}{10}$$

etc.

cum nunc ſit $\gamma = 0$, perſpicuum eſt fore etiam $\varepsilon = 0$, hincque porro $\eta = 0$, $\iota = 0$, etc. ita vt omnes termini alterni incipiendo ab γ ſint $= 0$, id quod ex praecedente lege tantum per obſeruationes patebat, nunc vero id neceſſario euenire debere intelligitur. Hinc ergo manente $\alpha = \frac{1}{2}$ erit vt ſequitur

$$\beta = \tfrac{1}{12}$$
$$\delta = -\tfrac{\beta^2}{5}$$
$$\zeta = -\tfrac{2\beta\delta}{7}$$
$$\theta = -\tfrac{2\beta\zeta - \delta\delta}{9}$$
$$\varkappa = -\tfrac{2\beta\theta - 2\delta\zeta}{11}$$

Quod ſi ergo ponatur $\beta = \frac{A}{2}$; $\delta = -\frac{B}{2^3}$; $\zeta = \frac{C}{2^5}$; $\theta = -\frac{D}{2^7}$, $\varkappa = \frac{E}{2^9}$, etc. ita vt ſit $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{A dX}{2 dx} - \frac{B d^3X}{2^3 dx^3} + \frac{C d^5X}{2^5 dx^5} - \frac{D d^7X}{2^7 dx^7} + \frac{F d^9X}{2^9 dx^9} - \frac{F d^{11}X}{2^{11} dx^{11}} +$ etc. tenebunt coefficientes A, B, C, D, etc: hanc legem

A =

$A = \frac{1}{6}$	$E = \frac{4AD + 4BC}{11}$
$B = \frac{2A^2}{5}$	$F = \frac{4AE + 4BD + 2C^2}{13}$
$C = \frac{4AB}{7}$	$G = \frac{4AF + 4BE + 4CD}{15}$
$D = \frac{4AC + 2B^2}{7}$	etc.

Obtinent ergo litterae A, B, C, D, etc. eos ipſos valores, quos ipſis ſupra in §. §.. 22 et 23 tribuimus. Atque hinc de conſenſu coefficientium in his expreſſionibus maxime diuerſis plene ſummus certi, neque eum caſui amplius adſcribere conueniet.

§. 29. Quanquam autem hoc modo ſatis expedite ſummam huius ſeriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} +$ etc. aſſignare valemus, ſi n eſt numerus par, tamen ex his iisdem principiis nihil omnino concludere poſſumus ad ſummas inueniendas, ſi n ſit numerus impar. Videri quidem poſſet, etiam has ſeries a quadratura circuli ita pendere, vt ſumma earum ſit $= N\pi^n$ caſibus ſcilicet quoque, quibus eſt n numerus impar: verum ſi has ſummas actu per approximationes ſumamus, videbimus coefficientem N non fieri numerum rationalem, niſi ſit n numerus par, id quod ex hac tabella clarius elucebit:

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} +$ etc. $= 1,644934066 = \frac{\pi^2}{6}$

$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} +$ etc. $= 1,202056903 = \frac{\pi^2}{25,79436}$

$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} +$ etc. $= 1,082323233 = \frac{\pi^4}{90}$

$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} +$ etc. $= 1,036927755 = \frac{\pi^5}{295,1215}$

$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} +$ etc. $= 1,017343062 = \frac{\pi^6}{945}$

$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} +$ etc. $= 1,008349329 = \frac{\pi^7}{2995,286}$

$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} +$ etc. $= 1,004077356 = \frac{\pi^8}{9450}$

1 +

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \text{etc.} = 1,002008392 = \frac{\pi^9}{29749,35}$$
$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \text{etc.} = 1,000994575 = \frac{\pi^{10}}{93555}$$
$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \text{etc.} = 1,000494188 = \frac{\pi^{11}}{294058,9}$$
$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.} = 1,000246086 = \frac{\pi^{12}}{924041\frac{544}{691}}$$

Neque vero vlla relatio inter ſummas poteſtatum imparium cernitur ſimilis ei, quam ſummae poteſtatum parium inter ſe tenent.

§. 30. Videtur autem aliquid circa ſummas poteſtatum imparium concludi poſſe, ſi ſigna ponantur alternantia. Cum enim imparium poteſtatum prima $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$ cognitam habeat ſummam ſcilicet $l\,2$: valde veriſimile videtur, etiam ſequentium poteſtatum imparium ſummas a logarithmo binarii pendere, ac fortaſſe inſuper a quadratura circuli. Sed antequam hic aliquid concludere queamus, inueſtigemus ſummas poteſtatum parium; ſitque

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = A\,\pi^2$$
$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = B\,\pi^4$$
$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = C\,\pi^6$$
$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \text{etc.} = D\,\pi^8$$
$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \text{etc.} = E\,\pi^{10}$$
etc.

vbi valores litterarum A, B, C, D etc. facile ex cognitis valoribus pro ſeriebus iisdem, dum omnes termini accipiuntur affirmatiui, concludi poſſunt, ſed praeſtabit peculiarem legem pro his elicere. Conſidero itaque ſequentem ſeriem:

$s =$

$$s = A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.}$$

quae ſubſtitutis ipſis ſeriebus abibit in hanc:

$$s = \frac{zz}{1-zz} - \frac{zz}{4-zz} + \frac{zz}{9-zz} - \frac{zz}{16-zz} + \text{etc.}$$

quae ſeries per §. 17. ſummata dabit

$$s = \frac{\pi z}{2 \sin. A. \pi z} - \frac{1}{2}$$ ſiue ſinu expreſſo

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2 \ldots 7} - \text{etc.}}$$

Quodſi nunc ponatur terminus precedens in ſerie litterarum A, B, C, D, E, etc. ſeu ante primum A exiſtens $= \Delta$ erit

$$\Delta = \frac{1}{2}$$
$$A = \frac{\Delta}{1.2.3} = \frac{1}{12}$$
$$B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{\Delta}{1.2.3.4.5}$$
$$C = \frac{B}{1.2.3} - \frac{A}{1.3.3.4.5} + \frac{\Delta}{1.2 \ldots 7}$$
$$D = \frac{C}{1.2.3} - \frac{B}{1.2.3.4.5} + \frac{A}{1.2 \ldots 7} - \frac{\Delta}{1.2 \ldots 9}$$

At valor ipſius Δ non eſt mere aſſumtitius, ſed reipſa ſummam ſeriei praecedentis exprimit, quae eſt

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \Delta \pi^0 = \frac{1}{2}$$

ſerierum vero reliquarum, quae hanc praecedunt, omnium ſummae ſunt $= 0$: ſcilicet

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = 0$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} = 0$$
$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc.} = 0$$
etc.

§. 31. Ex his igitur ſequitur ſummam cuiusuis ſeriei ex praecedentibus omnibus recte concludi poſſe hoc modo, ſi fuerit

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha\,\pi^n$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} - \frac{1}{4^{n-2}} + \text{etc.} = \beta\,\pi^{n-2}$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-4}} + \frac{1}{3^{n-4}} - \frac{1}{4^{n-4}} + \text{etc.} = \gamma\,\pi^{n-4}$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-6}} + \frac{1}{3^{n-6}} - \frac{1}{4^{n-6}} + \text{etc} = \delta\,\pi^{n-6}$$

erit $\alpha = \frac{\beta}{1.2.3} - \frac{\gamma}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta}{1.2\ldots7} - \frac{\varepsilon}{1.2\ldots9} + \frac{\zeta}{1.2\ldots11} - \text{etc.}$

Vt igitur ſummam huius ſeriei inueniamus

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}\ \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{etc.}$$

omnes, quae ſecundum hanc legem ipſam antecedunt conſiderari oportebit, quae ſunt:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = A\,\pi^3$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = A\,\pi$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = \frac{\alpha}{\pi}$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = \frac{\beta}{\pi^3}$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} = \frac{\gamma}{\pi^5}$$

eritque $B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{\alpha}{1.2.3.4.5} + \frac{\beta}{1.2\ldots7} - \frac{\gamma}{1.2\ldots9} + \text{etc.}$

At harum ſerierum omnium ſummae exhiberi poſſunt, eſt enim

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = l\,2$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = \frac{1}{4} = \frac{2.1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = \frac{-1}{8} = \frac{-2.1.2.3}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} = \frac{1}{4} = \frac{2.1.2.3.4.5}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \text{etc.} = \frac{-17}{16} = \frac{-2.1.2\ldots7}{\pi^8}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.}\right)$$

etc.

Atque

Atque hinc erit

$$A = \frac{l2}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{2.1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}\right)$$

$$\beta = \frac{2.1.2.3}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}\right)$$

$$\gamma = \frac{2.1.2.3.4.5}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}\right)$$

$$\delta = \frac{-2.1.2.\ldots.7}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{2.1.2.\ldots.9}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{etc.}\right)$$

etc.

§. 32. Summas autem poteſtatum parium fractionum, quarum denominatores ſunt numeri impares ſupra exhibuimus. Sit

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = P\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = Q\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = R\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.} = S\pi^8$$

Erit per §. 21: $P\pi^2 + Q\pi^4 + R\pi^6 + S\pi^8 + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}\,\text{tang}\,A.\frac{\pi}{2}$

At litterae α, β, γ, δ, etc. ſequentes obtinebunt valores.

$$\alpha = \frac{2.1}{\pi} P\pi^2$$

$$\beta = -\frac{2.1.2.3}{\pi} Q\pi^4$$

$$\gamma = \frac{2.1.3.4.5}{\pi} R\pi^6$$

$$\delta = -\frac{2.1.2.3.4.5.6.7}{\pi} S\pi^8$$

etc.

Ex lege ergo progreſſionis, ſi ponatur

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = A\pi = l2$$

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{etc.} = B\pi^3$$

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \text{etc.} = C\,\pi^5$$
$$1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{6^7} + \text{etc.} = D\,\pi^7$$
etc.

Poterimus hos coefficientes A, B, C, D, etc. ita determinare, vt ſit:

$$A = \frac{l2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3} + \frac{Q\pi^4}{4.5} + \frac{R\pi^6}{6.7} + \frac{S\pi^8}{8.9} + \text{etc.}\right)$$
$$B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3.4.5} + \frac{Q\pi^4}{4.5.6.7} + \frac{R\pi^6}{6.7.8.9} + \text{etc.}\right)$$
$$C = \frac{B}{1.2.3} - \frac{A}{1.2.3.4.5} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3\ldots7} + \frac{Q\pi^4}{4.5\ldots9} + \frac{R\pi^6}{6.7\ldots11} + \text{etc.}\right.$$
$$D = \frac{C}{1.2.3} \frac{-B}{1.2.3.4.5} + \frac{A}{1.2\ldots7} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3\ldots9} + \frac{Q\pi^4}{4.5\ldots11} + \text{etc.}\right.$$

§. 33. Antequam autem quicquam hinc concludere ſuſcipiamus, exemplo vno doceamus regulam hanc inuentam recte ſe habere; ac valores veros litterarum inde prodire. Sumamus igitur primam formulam, et cum ſit $A = \frac{l2}{\pi}$ habebitur iſta aequatio

$$\frac{l2}{2} = \frac{P\pi^2}{2.3} + \frac{Q\pi^4}{4.5} + \frac{R\pi^6}{6.7} + \frac{S\pi^8}{8.9} + \text{etc.}$$

Eſt vero ad veros valores appropinquando

$l2 = 0,693147180$
$P\pi^2 = 1,233700550$
$Q\pi^4 = 1,014678031$
$R\pi^6 = 1,001447077$
$S\pi^8 = 1,000155179$
$T\pi^{10} = 1,000017041$
$V\pi^{12} = 1,000001885$
$W\pi^{14} = 1,000000209$
$X\pi^{16} = 1,000000023$
$Y\pi^{18} = 1,000000002$

Sumamus primum vnitates integras, pro $P\pi^2$, $Q\pi^4$ etc. habe-

habebimus $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{8.9}+$ etc. cuius ſeriei ſumma conſtat, quippe quae eſt $= 1 - l\,2$ ſeu

0,306852810

nunc ſumamus eorundem terminorum fractiones annexas, quae per reſpectiuos denominatores diuiſae dabunt:

0,038950091
0,000733901
34454
2155
155
12
1

0,039720771 addatur $1 - l\,2$
0,306852819

0,346573590 At vero eſt $\frac{l2}{2} =$
0,346573590

vnde aequalitas luculenter perſpicitur.

§. 34. Cum igitur certo nunc conſtet de veritate propoſitionis §. 32. aſſertae, legem habemus, ſecundum quam ſummae ſerierum $1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+$ etc. denotante n numerum imparem quemcunque progrediuntur. Verum quia ex obſeruatione tantum nobis conſtat eſſe

$$\frac{l2}{2}=\frac{P\pi^2}{2\cdot 3}+\frac{Q\pi^4}{4\cdot 5}+\frac{R\pi^6}{6\cdot 7}+\frac{S\pi^8}{8\cdot 9}+\text{etc. ſiue}$$

$$l2=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.}\right)\\ \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{etc.}\right)\\ \frac{1}{21}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{etc.}\right)\\ \frac{1}{36}\left(1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{etc.}\right)\\ \frac{1}{55}\left(+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\frac{1}{9^{10}}+\text{etc.}\right.\\ \text{etc.}\end{cases}$$

operae pretium erit in demonſtrationem huius veritatis inquirere. Ponamus igitur

$$s = \frac{P\pi^2}{2.3} + \frac{Q\pi^4}{4.5} + \frac{R\pi^6}{6.7} + \frac{S\pi^8}{8.9} + \text{etc.}$$

atque inſtituantur ſequentes transformationes:

$$\frac{d.\pi s}{d\pi} = \frac{P\pi^2}{2} + \frac{Q\pi^4}{4} + \frac{R\pi^6}{6} + \text{etc.}$$

$$\frac{dd.\pi s}{d\pi^2} = P\pi + Q\pi^3 + R\pi^5 + \text{etc.}$$

Quia haec vltima ſeries ſi per π multiplicetur, ſummam habet $\frac{\pi}{4}$ tang. A. $\frac{\pi}{2}$, quae expreſſio locum habet, etiamſi π quantitas ſit variabilis, quemadmodum hic poſuimus. Erit itaque

$$dd.\pi s = \frac{d\pi^2}{4} \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2} \text{ et hinc}$$

$$d.\pi s = \frac{d\pi}{4} \int d\pi \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2} \text{ ac denique}$$

$$s = \frac{1}{4\pi} \int d\pi \int d\pi \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2}$$

cuius aequationis radix iam patet, quippe eſt $s = -\frac{1}{2}$.

§. 35. Conſideremus primum formulam hanc $\int d\pi$ tang. A. $\frac{\pi}{2}$ quae abit in $\int \frac{d\pi \text{ ſin A. } \frac{\pi}{2}}{\text{coſ. A } \frac{\pi}{2}} = -2 l \text{coſ. A } \frac{\pi}{2}$ hoc vero integrali ſubſtituto habebimus $s = \frac{-1}{\pi} \int \frac{d\pi}{2} l \text{ coſ. A. } \frac{\pi}{2}$. Ad hanc formulam integrandam pono tang. A. $\frac{\pi}{2} = t$, erit coſ. A $\frac{\pi}{2}$ $= \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $- l$ coſ. A. $\frac{\pi}{2} = l\sqrt{(1+tt)} = \frac{1}{2} l(1+tt)$ et $\frac{d\pi}{2} = \frac{dt}{1+tt}$; ex quo erit $s = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt)$ atque ideo quaeſtio huc eſt reducta, vt definiatur integrale $\int \frac{dt\, l(1+tt)}{1+tt}$ tali adhibita conſtante vt integrale euaneſcat poſito, $t = 0$; quo facto reſtitui oportet $t =$ tang. A. $\frac{\pi}{2}$ ſeu ob $\frac{\pi}{2} =$ arcui $90°$, erit $t = \infty$. Formula autem haec, quia eſt $l(1+tt) = \frac{tt}{1+tt} + \frac{t^4}{2(1+tt)^2} + \frac{t^6}{3(1+tt)^3} + \frac{t^8}{4(1+tt)^4}$ + etc.

$+$ etc. tranſit in ſequentem ita vt ſit $\int\frac{dt}{1+tt}\,l(1+tt) = \int\frac{ttdt}{(1+tt)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{t^4dt}{(1+tt)^3} + \frac{1}{3}\int\frac{t^6dt}{(1+tt)^4} + \frac{1}{4}\int\frac{t^8dt}{(1+tt)^5} +$ etc. Per reductionem autem formularum integralium eſt generaliter.

$$\int\frac{t^{2m}dt}{(1+tt)^{m+1}} = \frac{-t^{2m-1}}{2m(1+tt)^m} + \frac{2m-1}{2m}\int\frac{t^{2m-2}dt}{(1+tt)^m}$$

Quare cum ſit $\int\frac{dt}{1+tt} = \frac{\pi}{2}$ erit

$$\int\frac{ttdt}{(1+tt)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+tt}$$

$$\int\frac{t^4dt}{(1+tt)^3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2}$$

$$\int\frac{t^6dt}{(1+tt)^4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} - \frac{1t^5}{6(1+tt)^3}$$

$$\int\frac{t^8dt}{(1+tt)^5} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} - \frac{1\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3}$$
$$- \frac{1}{8}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4}$$

$$\int\frac{t^{10}dt}{(1+tt)^6} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2}$$
$$- \frac{1\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} - \frac{1\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} - \frac{1}{10}\cdot\frac{t^9}{(1+tt)^5}\text{ etc.}$$

Ex his ſubſtitutis orietur $\int\frac{dt}{1+tt}\,l(1+tt) =$

$$+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{t}{1+tt}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{t^3}{4(1+tt)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{t^5}{6(1+tt)^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{t^7}{8(1+tt)^4}\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{10\cdot 5} + \frac{9\cdot 11}{10\cdot 12\cdot 6} + \frac{9\cdot 11\cdot 13}{10\cdot 12\cdot 14\cdot 7} + \text{etc.}\right)$$

etc.

§. 36. Quaeramus primum ſummam ſeriei huius,

$$\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}$$

ponamusque:

$s =$

$$s = \frac{x}{2\cdot 1} + \frac{1.3.x^2}{2.4.2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\,x^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot x^4}{2.4.6\cdot 8.4} + \text{etc.}$$

erit $s = \int \frac{dz}{x\surd(1-x)}\ lx$, vt euoluenti facile patebit. At eſt $\int \frac{dx}{x\surd(1-x)} = c - l(1+\surd(1-x)) + l(1-\surd(1-x))$ hincque $s = c - l(1+\surd(1-x)) + l(1-\surd(1-x)) - lx$. vbi conſtans c ita debet eſſe comparata, vt poſito $x=0$ fiat $s=0$. Fiat igitur x infinite paruum, erit $\surd(1-x) = 1-\frac{x}{2}$ et $l(1-\surd(1-x)) = l\frac{x}{2} = lx - l2$ et $l(1+\surd(1-x)) = l2$; vnde $c = 2\,l2$. Ponatur nunc $x=1$, erit $s = 2\,l2$ atque

$$\frac{1}{2.1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4.2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8.4} + \text{etc.} = 2\,l\,2$$

Ex hac autem ſerie reliquarum ſerierum ſummae ita determinabuntur vt ſit:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot 2\,l\,2 - \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\,2\,l2 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1.3\cdot 5\cdot 2} - \frac{6}{5\cdot 2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{10.5} + \frac{9\cdot 11}{10.12.6} + \text{etc.} = \frac{2.4.6\cdot 8}{1\cdot 3.5\cdot 7}.2\,l\,2 - \frac{2\cdot 4\cdot 6\,8}{1\cdot 3.5.7.2} - \frac{6\cdot 8}{5.7.2} - \frac{8}{7\cdot 3}$$

etc.

Quibus ſummis ſubſtitutis proueniet $\int \frac{dt}{1+tt}\ l(1+tt)$

$$= + \frac{\pi}{2}.2\,l\,2$$
$$- \frac{t}{1+tt}.2\,l\,2$$
$$- \frac{t^3}{(1+tt)^2}\left(\frac{2}{3}.2\,l\,2 - \frac{1}{3\cdot 1}\right)$$
$$- \frac{t^5}{(1+tt)^3}\left(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,2\,l\,2 - \frac{4}{3\cdot 5.1} - \frac{1}{5\cdot 2}\right)$$
$$- \frac{t^7}{(1+tt)^4}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\,2\,l\,2 - \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5.7.1} - \frac{6}{5\cdot 7\cdot 2} - \frac{1}{7.3}\right)$$
$$- \frac{t^9}{(1+tt)^5}\left(\frac{2.4.6.8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\,2\,l\,2 - \frac{4.6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 1} - \frac{6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 2} - \frac{8}{7\cdot 9\cdot 3} - \frac{1}{9\cdot 4}\right)$$

etc.

§. 37.

§. 37. Quoniam vero ad inſtitutum noſtrum poſt integrationem abſolutam poni debet $t = \infty$, fiet $\int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt) = \pi l 2$ atque $s = \frac{1}{2}\pi \int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt) = \frac{l2}{2}$, qui eſt ille ipſe valor quem praeuidimus prodire debere (§. 34). Reliqui enim termini in expreſſione, quam pro $\int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt)$ inuenimus, ſi ponatur $t = \infty$ omnes euaneſcunt, quia in denominatoribus ſingulorum terminorum t plures habet dimenſiones quam in numeratoribus, atque inſuper coefficientes numerici decreſcunt. Niſi enim hoc eueniret, tuto concludere non poſſemus ſummam omnium terminorum, quorum quisque euaneſcit eſſe $= 0$. Nam ſi verbi gratia priores tantum coefficientium numericorum partes accipiantur, vt prodiret haec ſeries:

$$\frac{t}{1+tt} + \frac{2t^3}{3(1+tt)^2} + \frac{2 \cdot 4 t^5}{3 \cdot 5(1+tt)^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 t^7}{3 \cdot 5 \cdot 7(1+tt)^4} \text{ etc.}$$

ſumma ipſius caſu quo $t = \infty$, fit finita et $= \frac{\pi}{2}$ etiamſi ſinguli termini euaneſcant, quodſi autem integri coefficientes capiantur ob ſeriem eorum valde conuergentium, tota quoque ſeries euadit $= 0$.

§. 38. Inquiramus nunc in ſummam huius ſeriei $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = B\pi^3$ quae ſumma per §. 32. erit $B\pi^3 = \frac{\pi^2 l2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2\pi^2 \left(\frac{P\pi^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \text{etc.}\right)$ Ad valorem huius quantitatis inueniendum ſit $s =$

$$\frac{P\pi^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \text{etc.}$$

erit $\frac{d \cdot \pi^3 s}{d\pi} = \frac{P\pi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{Q\pi^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{R\pi^8}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.}$

$$\frac{dd \cdot \pi^3 s}{d\pi^2} = \frac{P\pi^3}{2 \cdot 3} + \frac{Q\pi^5}{4 \cdot 5} + \frac{R\pi^7}{6 \cdot 7} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3 \cdot \pi^3 s}{d\pi^3} = \frac{P\pi^2}{2} + \frac{Q\pi^4}{4} + \frac{R\pi^6}{6} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^4 \cdot \pi^3 s}{d\pi^4} = P\pi + Q\pi^3 + R\pi^5 + \text{etc.} = \tfrac{1}{4} \text{tang. A } \tfrac{\pi}{2}.$$

Regrediendo erit ergo.

$\frac{d^3\,\pi^3 s}{d\pi^3} = \frac{1}{4}\int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

$\frac{dd.\,\pi^3 s}{d\pi^2} = \frac{1}{4}\int d\pi\int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

$\frac{d.\,\pi^3 s}{d\pi} = \frac{1}{4}\int d\pi\int d\pi\int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

$\pi^3 s = \frac{1}{4}\int d\pi\int d\pi\int d\pi\int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

Atque hinc habebitur ſumma ſeriei propoſitae $B\pi^3 = \frac{\pi^2 l^2}{6} - \frac{1}{2\pi}\int d\pi\int d\pi\int d\pi\int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$, quae omnia integralia ita debent accipi, vt euaneſcant poſito $\pi = 0$.

§. 39. Ponatur $\frac{\pi}{2} = q$, ita vt integrationibus abſolutis q denotet quartam peripheriae partem circuli, cuius radius $= 1$ ſeu arcum 90 graduum. Sitque porro ſin. A $q = y$ et coſ. A $q = x = \sqrt{(1-yy)}$, erit tang. A. $\frac{\pi}{2} = \frac{y}{x}$. Quare ob $\pi = 2q$, erit ſumma noſtrae ſeriei $B\pi^3 = \frac{2qql2}{3} - \frac{4}{q}\int dq\int dq\int dq\int\frac{ydq}{x}$. Ponamus tantisper $\int dq\int dq\int dq\int\frac{ydq}{x} = u$ erit $B\pi^3 = \frac{2qql2}{3} - \frac{4u}{q}$, vbi in quantitate u inuenienda omnes integrationes ita debent accipi, vt integralia ſingula euaneſcant poſito $q = 0$ et $y = 0$, integralibus vero abſolutis erit $y = 1$ et $x = 0$. Eſt vero $\int\frac{ydq}{x} = \int\frac{ydy}{1-yy} = -l\sqrt{(1-yy)} = l\frac{1}{x}$.
et $l\frac{1}{x} = \frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^{10}}{10} +$ etc.
Cum nunc ſit $u = \int dq\int dq\int dq\; l\frac{1}{x}$, erit per reductionem integralium

$$u = q\int dq\int dq\; l\frac{1}{x} - \int qdq\int dq\; l\frac{1}{x}$$

atque porro

$$\int dq\int dq\; l\frac{1}{x} = q\int dq\; l\frac{1}{x} - \int qdq\; l\frac{1}{x}$$

$$\int qdq\int dq\; l\frac{1}{x} = \frac{qq}{2}\int dq\; l\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int qqdq\; l\frac{1}{x}$$

ergo

$$u = \frac{1}{2}qq\int dq\; l\frac{1}{x} - q\int qdq\; l\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int qqdq\; l\frac{1}{x}$$

ita

ita vt nunc tres formulas habeamus ſimpliciter differentiales, quas integrare debemus.

§. 40. Conſideremus ſingulas has tres formulas ſeorſim, ac primo quidem hanc $\int dq\, l\frac{1}{x}$, quam etſi iam ſupra integrauimus, tamen eandem ex conſideratione ſinuum et coſinuum denuo integremus, vt via facilior paretur ad reliquas integrandas. Eſt igitur:

$$\int dq\, l\frac{1}{x} = \int dq\, \left(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^{10}}{10} + \text{etc.}\right)$$

Ad hoc integrale inueniendum conſideretur membrum eius quodcunque $\int y^{n+2} dq$, et cum ſit $dq = \frac{dy}{x} = \frac{-dx}{y}$ et $xx + yy = 1$, erit

$$\int y^{n+2} dq = -\int y^{n+1} dx = -y^{n+1}x + (n+1)\int y^n x\, dy$$

at eſt $\int y^n x\, dy = \int y^n x^2 dq = \int y^n dq - \int y^{n+2} dq$

ob $xx = 1 - yy$: ex quo erit:

$$\int y^{n+2} dq = -y^{n+1}x + (n+1)\int y^n dq - (n+1)\int y^{n+2} dq$$

atque

$$\int y^{n+2} dq = \frac{-y^{n+1}x}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}\int y^n dq$$

Hinc itaque integrale cuiusque membri reducitur ad integrale praecedentis, et quoniam integratione abſoluta fit $x = 0$; erit pro hoc caſu

$$\int y^{n+2} dq = \frac{n+1}{n+2}\int y^n dq.$$

Ex hac ergo formula reperientur ſingulae integralis partes vt ſequitur.

$$\int y^2 dq = \tfrac{1}{2}q$$
$$\int y^4 dq = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}q$$
$$\int y^6 dq = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}q$$
$$\int y^8 dq = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}q$$

 Hanc-

Hancobrem habebitur: $\int dq\, l\frac{1}{x} = \frac{1}{2}q\,(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} +$ etc.) cuius ſeriei cum iam ſupra inuenta ſit ſumma (§. 36.) $= 2\,l\,2$ erit $\int dq\, l\frac{1}{x} = q\,l\,2$.

§. 41. Progrediamur iam ad ſecundam formulam integralem $\int q\,dq\, l\frac{1}{x}$, quae abit in

$$\int q\,dq\, l\frac{1}{x} = \int q\,dq\,(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \text{etc.})$$

cuius partem conſideremus quamcunque $\int y^{n+2}q\,dq = -\int y^{n+1}q\,dx = -y^{n+1}qx + \int y^{n+1}x\,dq + (n+1)\int y^n qx\,dy$

$$= -y^{n+1}qx + \frac{y^{n+2}}{n+2} + (n+1)\int y^n q\,dq - (n+1)\int y^{n+2}q\,dq$$

Poſito itaque $y = 1$ et $x = 0$, erit

$$\int y^{n+2}q\,dq = \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{n+1}{n+2}\int y^n q\,dq$$

Integralia igitur ſingulorum membrorum ita ſe habebunt:

$$\int y^2 q\,dq = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{2}$$

$$\int y^4 q\,dq = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{q^2}{2}$$

$$\int y^6 q\,dq = \frac{1}{6^2} + \frac{5}{6\cdot 4^2} + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{q^2}{2}$$

$$\int y^8 q\,dq = \frac{1}{8^2} + \frac{7}{8\cdot 6^2} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4^2} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{q^2}{2}$$

etc.

Ex quo obtinebitur integrale $\int q\,dq\, l\frac{1}{x} =$

$$+ \frac{qq}{4}\,(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}\ \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 2^2}\,(\frac{1}{1} + \frac{3}{4\cdot 2} + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.})$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 4^2}\,(\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.})$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 6^2}\,(\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.})$$

etc.

Vel etiam hac forma $\int q\,dq\, l\frac{1}{x} =$

$$\frac{qq}{4}\,(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}$$

+

$+ \frac{1}{2^2\cdot 2} + \frac{1}{4^2\cdot 4} + \frac{1}{6^2\cdot 6} + \frac{1}{8^2\cdot 8} + \text{etc.}$

$+ \frac{3}{2^2\cdot 4^2} + \frac{5}{4^2\cdot 6^2} + \frac{7}{6^2\cdot 8^2} + \frac{9}{8^2\cdot 10^2} + \text{etc.}$

$+ \frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 4\cdot 6^2} + \frac{5\cdot 7}{4^2\cdot 6\cdot 8^2} + \frac{7\cdot 9}{6^2\cdot 8\cdot 10^2} + \frac{9\cdot 11}{8^2\cdot 10\cdot 12^2} + \text{etc.}$

$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^2} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{4^2\cdot 6\cdot 8\cdot 10^2} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{6^2\cdot 8\cdot 10\cdot 12^2} + \text{etc.}$

hae autem ſeries id ipſum, quod eſt in quaeſtione inuoluunt, nempe ſummationem cuborum terminorum ſeriei harmonicae.

§. 42. Quod ſi ſequamur priorem formam, omnes ſeries ſummabiles §. 36, habebiturque

$$\int q\,dq\,l\tfrac{1}{x} = \tfrac{qq}{2}\,l2$$
$$+ \tfrac{1}{2^2}\left(\tfrac{2}{1}\,l2\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4^2}\left(\tfrac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\,l2 - \tfrac{4}{3\cdot 2}\right.$$
$$+ \tfrac{1}{6^2}\left(\tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\,l2 - \tfrac{4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 2} - \tfrac{6}{5\cdot 4}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{8^2}\left(\tfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\,l2 - \tfrac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 2} - \tfrac{6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 4} - \tfrac{8}{7\cdot 6}\right) \text{etc.}$$

quae ſi denuo ſeries deorſum capiantur, dant.

$$\int q\,dq\,l\tfrac{1}{x} = \tfrac{qq}{2}\,l2$$
$$+ l2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3\cdot 4} + \tfrac{2\cdot 4\cdot}{3\cdot 5\cdot 6} + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8} + \text{etc.}\right.$$
$$- \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{5\cdot 6} + \tfrac{4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 8} + \tfrac{4\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \text{etc.}\right.$$
$$- \tfrac{1}{4\cdot 5}\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{6}{7\cdot 8} + \tfrac{6\cdot 8}{7\cdot 9\cdot 10} + \tfrac{6\cdot 8\cdot 10}{7\cdot 9\cdot 11\cdot 12} + \text{etc.}\right.$$
$$- \tfrac{1}{6\cdot 7}\left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{8}{9\cdot 10} + \tfrac{8\cdot 10}{9\cdot 11\cdot 12} + \tfrac{8\cdot 10\cdot 12}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 14} + \text{etc.}\right.$$

etc.

At eſt $\frac{1}{2} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8} + \text{etc.} = \frac{qq}{2}$

vnde erit

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{5\cdot 6} + \tfrac{4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 8} + \text{etc.} = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{qq}{2} - \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{6}{7\cdot 8} + \tfrac{6\cdot 8}{7\cdot 9\cdot 10} + \text{etc.} = \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{qq}{2} - \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{1}{4}$$
$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{8}{9\cdot 10} + \tfrac{8\cdot 10}{9\cdot 11\cdot 12} + \text{etc.} = \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{qq}{2} - \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{5\cdot 7}{4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{7}{6}\cdot\tfrac{1}{6}$$

etc.

 Quam-

Quamobrem habebitur $\int q\,dq\,l\frac{1}{x} = qq\,l\,2$

$$- \frac{qq}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2\cdot4^2} + \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6^2} + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8^2} + \text{etc.}\right.$$

$$+ \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+ \frac{3}{2\cdot4^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$+ \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{4\cdot6^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{6}$$

$$+ \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5\cdot7}{4\cdot6\cdot8^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{6\cdot8^2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{8^2}\cdot\frac{1}{8}$$

etc.

§. 43. At fortaſſe difficultas commodam expreſſionem inueniendi diminuetur, ſi tres illas formulas integrales colligamus. Hancobrem ſumamus tertiam formulam $\int qq\,dq\,l\frac{1}{x}$ quae abit in $\int qq\,dy\left(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \text{etc.}\right)$ Conſideretur formula $\int y^{n+2}qq\,dq$ quae abit in $-\int y^{n+1}qq\,dx = -y^{n+1}qqx + 2\int y^{n+1}qx\,dq + (n+1)\int y^n qqx\,dy = -y^{n+1}qqx + 2\int y^{n+1}q\,dy + (n+1)\int y^n qq\,dq - (n+1\int y^{n+2}qq\,dq$: hinc ergo erit

$$\int y^{n+2}qq\,dq = \frac{-y^{n+1}qqx}{n+2} + \frac{2}{n+2}\int y^{n+1}q\,dy + \frac{n+1}{n+2}\int y^n qq\,dq$$

At eſt $\int y^{n+1}q\,dy = \frac{y^{n+2}q}{n+2} - \frac{1}{n+2}\int y^{n+2}\,dq = \frac{q}{n+2} - \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot(n+2)}q$ poſito $y=1$ (§. [illegible]0). Conſequenter erit $\int y^{n+2}qq\,dq = \frac{2q}{(n+2)^2}\left(1 - \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(n+2)}\right) + \frac{n+1}{n+2}\int y^n qq\,dq$. ac integralis quaeſiti ſingula membra erunt:

$$\int y^2 qq\,dq = \frac{1}{2^2}\cdot2q - \frac{1}{2^2\cdot2}2q + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^3}{3}$$

$$\int y^4 q^2\,dq = \frac{1}{4^2}2q - \frac{1}{4^2}\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot2q + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{4}\cdot2q - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}2q + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{q^3}{3}$$

$$\int y^6 q^2\,dq = \frac{2q}{6^2}\left(1 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right) + \frac{5}{6}\cdot\frac{2q}{4^2}\left(1 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right) +$$
$$\frac{3\cdot5}{4\cdot5}\cdot\frac{2q}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{q^3}{3}$$

His valoribus ſubſtitutis et terminis in ordinem redactis redactis reperietur tandem

$\int qq$

$$\int qqdq\, l\tfrac{1}{x} = \tfrac{q^3}{6}\left(\tfrac{1}{2\cdot 1} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2^2} q\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \tfrac{3}{4\cdot 2} + \tfrac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 3} + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4^2} q\left(1 - \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6\cdot 3} + \tfrac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \tfrac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{6^2} q\left(1 - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{7}{8\cdot 4} + \tfrac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \tfrac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
etc.

Cum autem ſit $u = \tfrac{1}{2}qq\int dq\, l\tfrac{1}{x} - q\int qdq\, l\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{2}\int qqdq\, l\tfrac{1}{x}$ erit his integralibus, vt ſunt inuenta additis

$$u = \tfrac{q^3}{12}\left(\tfrac{1}{2\cdot 1} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 2^2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{3}{4\cdot 2} + \tfrac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 3} + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 4^2}\,\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6\cdot 3} + \tfrac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \tfrac{3\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 6^2}\cdot\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{7}{8\cdot 4} + \tfrac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
etc.

His autem ſeriebus integratis vt ſupra, erit

$$u = \tfrac{q^3}{6}\, l\, 2$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 2^2}\cdot 2\, l 2$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 4^2}\cdot\left(2\, l2 - \tfrac{1}{2\cdot 1}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 6^2}\left(2\, l2 - \tfrac{1}{2\cdot 1} - \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 8^2}\left(2\, l2 - \tfrac{1}{2\cdot 1} - \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 10^2}\left(2\, l2 - \tfrac{1}{2\cdot 1} - \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}\right)$$

Eſt vero $\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{6^2} + \text{etc.} = \tfrac{qq}{6}$ vnde

$$u = \tfrac{q}{2\cdot 2}\left(+\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{8^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1\cdot 3\, q}{2\cdot 4\cdot 4}\left(\tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{8^2} + \tfrac{1}{10^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot q}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\left(\tfrac{1}{8^2} + \tfrac{1}{10^2} + \tfrac{1}{12^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot q}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 8}\left(\tfrac{1}{10^2} + \tfrac{1}{12^2} + \tfrac{1}{14^2} + \text{etc.}\right.$$
etc.

Hinc

Hinc igitur erit:

$$u = \frac{q}{2.2}\left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\, q}{2.4.4}\left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5 q}{2.4.6.6}\left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2}\right)$$

vel ſerie prima verticali actu ſummata

$$u = \frac{q^3}{6}\, l2$$
$$- \frac{q}{2.2}\left(\frac{1}{2^2}\right)$$
$$- \frac{1\cdot 3\, q}{2.4.4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\right)$$
$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot q}{2.4.6.6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2}\right)$$

etc.

§. 44 Cum nunc ſeriei noſtrae propoſitae $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} -$ etc. ſumma ſit $= B\pi^3 = \frac{2qq\, l2}{3} - \frac{4u}{q}$ fiet eadem ſumma $=$

$$+ \frac{1}{2.2}\cdot 1$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2.4.4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.6}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2.4.6.8.8}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right)$$

etc.

Vel cum ſit $\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.4.4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.6}$ etc. $= l2$ erit ſeriei propoſitae ſumma $B\pi^3 = l2 + \frac{1}{2^2}\left(l2 - \frac{1}{2.2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(l2 - \frac{1}{2.2} - \frac{1\cdot 3}{2.4.4}\right) + \frac{1}{4^2}\left(l2 - \frac{1}{2.2} - \frac{1\cdot 3}{2.4.4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.6}\right) +$ etc. ſiue haec eadem ſumma ita poterit exprimi vt ſit

$$B\pi^3 = \frac{\pi^2}{6}\, l2 - \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2.2}\right)$$
$$- \frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.4.4}\right)$$
$$- \frac{1}{4^2}\left(\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.4.4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.6}\right)$$
$$- \frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.4.4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2.4.6.8.8}\right) \text{etc.}$$

Quoniam autem vtcunque has ſeries tranſmutemus, eas ad ſeriem ſimplicem, cuius ſumma conſtet, reducere non poſſumus, negotium hoc abrumpamus, pluribus his expreſſionibus contenti, quas ſeriei propoſitae $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} -$ etc. aequales eſſe inuenimus.

COM-

COMMENTATIONES DE OSCILLATIONIBVS COMPOSITIS PRAESERTIM IIS QVAE FIVNT IN CORPORIBVS EX FILO FLEXILI SVSPENSIS.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

De oſcillationibus ſermonem facturo ante omnia mihi Tab. II. monendum erit, ſolas eas conſiderari hic pro more ſolito, quae ita paruae ſunt, vt in calculo pro infinite paruis haberi poſſint. Poſſunt autem in ſyſtemate, cuius ſingulae partes motibus reciprocis agitantur, duo potiſſimum oſcillationum genera conſiderari: primum eſt cum ſingulae ſyſtematis partes neceſſario itus reditusque ſuos ſimul incipiunt, ſimulque finiunt: tales oſcillationes faciunt corpora ex filo rigido firmata et ſuſpenſa iam pridem a Geometris exploratas: alterum genus eſt, cum diuerſae ſyſtematis partes diuerſis temporibus oſcillationes ſuas perficere poſſunt, quamuis nexus partium talis ſit, vt ſingularum oſcillationum indoles a mutatione vniuscuiusuis mutentur. Has poſtremas oſcillationes voco *compoſitas*. Huiuscemodi oſcillationum exemplum haud inelegans dedi deſumtum a corporibus filo flexili connexis et ſuſpenſis vid. Comm. tom VI. pag. 108. et nuperrime expoſui aliud, quo duplices in corporibus humido inſidentibus oſcillationum ſpecies ſimul exiſtentes, quaeque non poſſint aliter, quam ſimul determinari, examinaui et definiui.

§. 2. Oſcillationes noſtrae compoſitae quam maxime differunt a ſimplicibus, praeſertim autem, eo quod ſint valde inaequales, dum quaeuis ſyſtematis particula modo minorem modo maiorem excurſionem facit, easque modo citius modo tardius percurrit. At vero poteſt, quod imprimis hic notandum, excurſionum magnitudinibus talis aſſignari proportio conſtans, vt ea ſemel poſita perpetuo conſeruetur, fiantque oſcillationes non ſolum vniformes, ſed et ſingulae tam maiores quam minores inter ſe iſochronae atque toutochronae: ſtatuo autem, tam ratione quam pluribus experimentis inductus, oſcillationes compoſitas ad hunc vniformitatis ſtatum ſemper magis magisque tendere ſeque tandem ſua ſponte componere, aliae citius quidem aliae lentius, quaedam autem citiſſime: ita v. gr. chorda muſica non poteſt non ab initio vibrationes facere inaequales, quae tamen dicto citius fiunt tantum non regulares, dum chorda vibrata mox ſe componit ad curuaturam tautochroniſmo eſſentialem.

§. 3. Nec vno tantum modo oſcillationes fiunt vniformes, ſed aliquando pro re nata duobus modis, aliquando pluribus, aliquando etiam infinitis, quod egregie illuſtratur eodem, quod ſupra citaui exemplo corporum filo flexili connexorum et ſuſpenſorum. Si enim duo ſunt corpora, duobus diuerſis modis fiunt oſcillationes vniformes, idemque tribus obtinetur modis, cum corpora ſunt tria, et ſic porro; atque ſi tandem corpora ſumas numero infinita catenam quaſi perfecte flexilem efformantia, infinitis ſimul modis obtinetur in catena oſcillante iſochroniſmus: pro quouis autem modo durationes oſcillationum aliae ſunt: ſtatus interim vniformitatis, quem partes ſyſtematis oſcillantes

lantes maxime affectant, ille eſt, quo oſcillationes inter omnes poſſibiles fiunt lentiſſimae.

§. 4. Similiter multis imo et infinitis modis chorda muſica tenſa motus ſuos tremulos efformat iſochronos in theoria, quamuis illi difficulter obtineantur, ſingulis autem modis alius editur ſonus magis minusue acutus. Modus primus et maxime naturalis eſt, quum chorda inter oſcillandum efformat arcum vnicum, tuncque facit oſcillationes lentiſſimas, ſonumque edit inter omnes poſſibiles maxime grauem reliquis omnibus fundamentalem. Modus alter poſtulat vt chorda inter oſcillandum duos arcus ad partes diverſas poſitos efformet, tuncque fiunt oſcillationes duplo frequentiores, iamque editur ſoni fundamentalis *octaua*: tum ſi chorda inter oſcillandam incuruatur in tres, quatuor, quinque etc. arcus alterna ſerie poſitos, fiunt oſcillationes vniuscuiusuis arcus triplo, quadruplo, quintuplo etc. frequentiores, ſonique eduntur ratione ſoni fundamentalis *octauae quinta*, *octaua duplex*, *octauae duplicis tertia maior* proxime et ſic porro. Inſeruiunt hae obſeruationes ad multa phaenomena acuſtica circa chordas muſicas explicanda; cur v. gr. ſoni tam ſonori ſint in tuba marina? cur in hoc inſtrumento vnichordo ii tantum modo ſoni grati, pleni et perfecti ſint, cum pars chordae, quae arcu pulſatur, praeciſe ſubmultipla eſt chordae totius? et quae ſunt tam in hoc inſtrumento muſico, quam in aliis phaenomena reliqua, quae ſingula a Merſenno in libris Harmonicorum recenſentur quidem, at minime recte explicantur. Haec autem obiter monuiſſe ſufficiat: pergo nunc ad problema mechanicum, quo argumentum de oſcillationibus compoſitis vlterius explicabitur.

§. 5. Conſiderabimus itaque corpora finitae extenſionis ex puncto fixo mediante filo flexili datae longitudinis ſuſpenſa. Haec corpora cum hinc inde agitantur, motum duplicem angularem obtinere conſiderari poſſunt; alterum quo angulus filum inter et lineam verticalem per punctum fixum tranſeuntem continue mutatur, alterum quo angulus inter idem filum et lineam, quae per punctum, vbi filum corpori alligatur et per centrum grauitatis corporis tranſit, perpetuo variat. Hi motus angulares irregulares, inaequales, perturbati, tam ratione durationis quam magnitudinis ſtatim ſunt: at fieri poteſt vt ſimul incipiant ſimulque finiantur, tuncque oſcillationes ad ſtatum vniformitatis reductae ſunt, ad quem ſua ſponte magis magisque accedunt. Atque iſte eſt ſtatus, quem ſolum conſiderabimus, et cuius indolem explorare conſtituimus.

§. 6. Sit igitur primo (nec enim argumentum ſtatim generaliſſime inquirere iuuat) linea recta C H (fig. 5.) craſſitiei et grauitatis vtcunque inaequalis, ſuſpenſa ex filo A C perfecte flexili omnique deſtituto grauitate, Patet autem requirere legem vniformitatis oſcillationum, vt ſingula puncta lineae grauis oſcillantis ſimul perueniant in ſitum verticalem C H ſimulque in ſitum extremum D G, in quo tota linea ad temporis punctum veluti quieſcit. Si vero putemus lineam D G a ſtatu quietis verſus lineam verticalem motu accelerato progredi, tunc facile intelligimus, ſi ſingula virgae puncta vim acceleratricem patiantur diſtantiis eorundem à linea verticali conſtanter proportionalem, fore tunc vt ſingula etiam puncta ſimul in ſitum lineae verticalis perueniant. Igitur ſitus virgae vbique talis eſſe debet, vt vis acceleratrix pro quouis virgae puncto

Tab. II.

cta

cto hanc praefatam habeat legem. Ceterum habetur, vt notum eſt, vis acceleratrix, ſi vis punctum horizontaliter verſus lineam verticalem vrgens diuidatur per maſſam puncti. His praemonitis iam inquirenda nobis venit vis acceleratrix pro ſingulis virgae punctis.

§. 7. Sit igitur virga in ſitu extremo D G poſita, haecque dein producatur vsque in B, vbi lineam verticalem ſecat: tum centro B ducantur arculi D C, E F, O Q et G H, qui pro lineolis infinite paruis horizontalibus haberi poſſunt, quia hic tantum de oſcillationibus minimis ſermo eſt. Denotat autem punctum D locum, ex quo filum virgae alligatum eſt, ſiue is ſit in extremitate virgae, ſiue alicubi in medio. In puncto E ponimus centrum grauitatis virgae; per O intelligimus punctum quodcumque in virga ſumtum, et per G punctum virgae infimum.

Producatur nunc A D vsque in M, ponaturque A C $= n$; C H $= m$; C F $= g$; incognita B C $= \alpha$; E F $= q$; erit D C $= \frac{\alpha q}{\alpha + g}$; vis grauitatis deſignetur per vnitatem, ſitque variabilis B Q vel B O $= x$; maſſa D O $= \xi$ data per x et conſtantes; maſſa totius virgae $=$ M: Ducatur minima $o\,q$ alteri O Q parallela et infinite propinqua: ſic erit maſſa elementi O $o = d\,\xi$. Quoniam autem vis acceleratrix elementi O o ſeu potentia elementum Oo horizontaliter verſus lineam verticalem vrgens diviſa per maſſulam $d\,\xi$ eſt proportionalis (per §. 6.) lineae O Q ſeu etiam lineae B Q, faciemus vim iſtam acceleratricem $= \frac{x}{a}$ intelligendo per a aliquam conſtantem: ſic igitur quoduis punctum O vim acceleratricem patitur indicatam per $\frac{x}{a}$ et maſſula elementi O o vim horizonta-

lem exercet indicandam per $\frac{xd\xi}{a}$: vnde ſi cuiuis elemento O o potentia contraria intelligatur applicata, quae ſit $=\frac{xd\xi}{a}$, totum ſyſtema in aequilibrio, ad quod in ſitu extremo ad momentum temporis reductum fuiſſe cenſeri poteſt (§. 6.) perpetuo ſeruabitur.

§. 8. Si iam ducatur horizontalis O R, quae exprimat praefatam potentiam horizontalem $\frac{xd\xi}{a}$ elementum O o ab O verſus R trahentem, oportet vt omnes iſtae potentiae ſyſtema in aequilibrio ſeruent: exinde per regulas ſtaticae concludere licet, *primo* ſummam omnium potentiarum virgam in ſitu D G detinentium eamque, ne ad verticalum accedat impedientium eſſe aequalem ſummae omnium potentiarum horizontalium contrariarum, quae nempe à grauitate virgae oriuntur. *Secundo* ſi conſideretur virga D G tanquam vectis mobilis circa punctum D, vectem hunc etiamnum in ſtatu quietis et aequilibrii permanſurum. Hiſce igitur duobus requiſitis erit ſatisfaciendum.

§. 9. Conditioni *primae* ita ſatisfaciemus. Summa omnium potentiarum O R elementis O o applicatarum eſt $=\int\frac{xd\xi}{a}$; ſed praeter hanc potentiarum claſſem alia adhuc potentia eſt conſideranda ab obliqua fili actione oriunda, tenditur enim filum A D à toto virgae pondere M (quia excurſiones virgae cenſentur infinite paruae) et propter fili reactionem punctum D trahitur ſimul in directione D A pari potentia M, vnde ſequitur ex reſolutione potentiarum virgam in puncto D extrorſum trahi potentia quae eſt $=\frac{EN}{ED}\times M=\frac{(n-\alpha)q}{n(\alpha+g)}\times M$. Eſt itaque ſumma omnium et ſingularum potentiarum horizontalium

talium virgam extrorſum trahentium $= \int \frac{x d\xi}{a} + \frac{(n-\alpha) q}{n(\alpha+g)}$. M. Iam vero inquiramus in ſummam potentiarum contrariarum, quae virgam horizontaliter introrſum ad ſitum verticalem trahunt: hae omnes oriuntur à grauitate virgae, eſtque ſumma earum $= \frac{DC}{DB}$. M $= \frac{q}{\alpha+g}$. M. Habemus itaque vi primae conditionis hanc aequationem.

$$\int \frac{x d\xi}{a} + \frac{(n-\alpha) q}{n(\alpha+g)} . M = \frac{q}{\alpha+g} . M.$$

Eſt autem $\int x\, d\xi = BF . M = (a+g) . M$. Hoc igitur valore ſubſtituto reductaque aequatione prodit

$$\text{I. } n(a+g)^2 = a\,\alpha\, q.$$

Conditionem problematis *ſecundam* in praecedente paragrapho expoſitam ſic implebimus; Eſt momentum potentiae O R ad vectem G D circa punctum D extrorſum rotandum $= \frac{x d\xi}{a} . OD = \frac{x d\xi}{a} . (x-\alpha)$ et ſumma omnium momentorum $= \int \frac{(x-\alpha) x d\xi}{a}$; tenſio fili hic nequicquam facit: momentum autem omnium potentiarum, contrariarum, quae à pondere virgae oriuntur, habetur ſi pondus totius virgae M applicatum putetur in centro grauitatis E, iſtudque pondus multiplicetur per rationem $\frac{EF}{EB}$ atque per longitudinem vectis E D, id eſt, per $\frac{g}{\alpha+g}$ et per g: eſt itaque momentum omnium potentiarum contrariarum $= \frac{gq}{\alpha+g} \times M$: Vnde habemus nunc hanc aequationem

$$\int \frac{(x-\alpha) x d\xi}{a} = \frac{gq}{\alpha+g} \times M.$$

Poterimus autem quantitati iſti ſummatoriae $\int \frac{(x-\alpha) x d\xi}{a}$ aliam ſubſtituere intelligibiliorem; ponatur nempe C Q ſeu $x-\alpha = y$ erit $\int \frac{(x+\alpha).x d\xi}{a} = \int \frac{\alpha y d\xi}{a} + \int \frac{yy d\xi}{a} = \frac{\alpha g M}{a} + \int \frac{yy d\xi}{a}$

Vt vero intelligatur etiam terminus $\int \frac{yy d\xi}{a}$, notandum eſt, longitudinem penduli ſimplicis (quam vocabimus L) iſochroni

chroni cum oſcillationibus minimis virgae C H ex puncto fixo C ſuſpenſae eſſe $= \frac{\int yyd\xi}{gM}$ adeo vt ſit $\frac{\int yyd\xi}{gM} = L$ atque adeo $\int \frac{yyd\xi}{a} = \frac{LgM}{a}$. Eſt igitur $\int \frac{(x-a)xd\xi}{a} = \frac{\alpha gM}{a} + \frac{LgM}{a}$: Hoc igitur valore ſubſtituto in praemiſſa aequatione oritur haec alia $\frac{\alpha gM}{a} + \frac{LgM}{a} = \frac{gq}{\alpha+g} . M$, quae reducta dat

$$\text{II.}\ (\alpha + L) . (\alpha + g) = a q$$

Ope duarum, quas inuenimus, aequationum, eliminanda prius eſt arbitraria aſſumta a deindeque determinandus valor incognitae α per quantitates pure cognitas. Hoc modo inuenitur

$$\alpha = \frac{n - L \pm \sqrt{(\overline{n-L}^2 + 4ng)}}{2}$$

Et haec aequatio determinat ſitum virgae extremum D G, quod negotium, in quo omne problematis momentum poſitum eſt, in hoc paragrapho expedire conſtitueram. Situm autem ſimilem virga, dum oſcillationes vniformes perficit, perpetuo ſeruabit, ita vt virga in omni ſitu continuata tranſeat per idem punctum B. Nec tamen inde concludendum eſt virgam eadem lege oſcillationes ſuas perficere atque ſi ex virga rigida D B omni grauitate deſtituta eſſet ſuſpenſa, quia linea D B non exacte eandem longitudinem ſeruat.

§. 10. Determinato valore ipſius α facile eſt longitudinem quaeſitam penduli ſimplicis iſochroni definire: Quia enim cuiusuis elementi O o vis acceleratrix eſt $= \frac{x}{a}$, via autem ab eodem puncto deſcribenda ſeu O Q $= \frac{qx}{\alpha+g}$ et quia longitudo penduli iſochroni habetur diuidendo viam deſcribendam per vim acceleratricem, erit longitudo iſta $= \frac{aq}{\alpha+g}$: Eſt autem per aequationem ſecundam praeceden-

cedentis paragraphi $aq = (\alpha + L) . (\alpha + g$; erit itaque longitudo quaeſita penduli ſimplicis iſochroni l ſimpliciter $= \alpha + L$, ſiue (per §. 9.)

$$l = \frac{n + L \pm \sqrt{(\overline{n - L}^2 + 4ng)}}{2}.$$

§. 11. Aequationes quas in duobus ſuperioribus paragraphis eruimus, ſingulares nos docent proprietates, quibus hae oſcillationes gaudent. Memorabimus ſequentes

(*a*) Praecipue notandum eſt, duobus modis oſcillationes fieri poſſe vniformes, prouti in expreſſione quantitatis α ex ſignis, quae quantitati radicali praefiguntur, ſeligatur vel ſuperius vel inferius: ſi autem ſuperius accipitur, ſimul etiam ſuperius eſt ſeligendum in expreſſione quantitatis l idemque de ſigno inferiori dicendum. Pro ſigno itaque ſuperiori oſcillationes fiunt multo tardiores quam pro inferiori: tardiores autem plerumque parum admodum differunt ab oſcillationibus Hugenianis pro ſyſtemate rigido.

(*b*) Si longitudo virgae minima ſit reſpectu habito ad longitudinem fili ex quo virga ſuſpenditur, erunt etiam quantitates L et g minimae, fietque proxime $l = n + g$, ſi ſignum ex ambiguis affirmatiuum ponatur aut $l = L - g$ ſi ſignum negatiuum accipiatur: in caſu priori fit $\alpha = n - L - g$, in poſteriori $\alpha = -g$: in hoc igitur caſu virga circa centrum ſuum grauitatis veluti rotatur inter oſcillandum habetque longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aequalem diſtantiae centri grauitatis à centro oſcillationis quod virgae competeret, ſi ex puncto fixo C ſuſpenderetur.

(*c*) Si è contrario virga longiſſima ex filo breuiſſimo ſuſpenſa ſit, erit in caſu priori $\alpha = \frac{ng}{L}$ et $l = L + \frac{ng}{L}$, at verò in caſu poſteriori, qui hic notari praecipue meretur, habebimus proxime $\alpha = -L$ et $l = n - \frac{ng}{L}$, quod indicat, fieri nunc inter oſcillandum rotationem circa centrum oſcillationis quod virgae ex puncto fixo l ſuspenſae competit et eſſe tunc longitudinem penduli iſochroni $l = \frac{L-g}{L} \times n$.

(*d*) Si virga ex centro grauitatis ſuspenſa ſit, euaneſcit poſterior oſcillationum claſſis fitque pro claſſe priori $\alpha = \infty$ et $l =$ longitudini fili.

Ceterum obſeruandum eſt ſolutionem noſtram minime requirere, vt filum virgae ex eiusdem ſummitate alligatum putetur: poteſt enim ex quocunque puncto eſſe alligatum. Igitur per punctum D aut C non intelligitur virgae ſummitas ſed punctum ex quo virga filo eſt annexa. Figura ſexta litteris ſuis analogis oſtendit exemplum ſecundae oſcillationum claſſis: tum etiam figura ſeptima et octava ambas oſcillationum claſſes illuſtrant, quum virgae non ſunt ex ſummitate ſuſpenſae.
Tab. II.

§. 12. Iſta quae diximus nunc porro illuſtrabimus exemplis particularibus, ſupponendo ſcilicet virgas homogeneas et vniformiter craſſas, quarum longitudines deſignabimus per m: ſic erit $g = \frac{1}{2} m$ et $L = \frac{2}{3} m$, ſi virgae ſunt ex ſummitate ſua ſuspenſae: his autem valoribus ſubſtitutis fit $\alpha = \frac{3n - 2m \pm \sqrt{(qnn + 6mn + 4mm)}}{6}$ atque $l = \frac{3n + 2m \pm \sqrt{(qnn + 6mn + 4mm)}}{6}$ ſi vero virga ratione fili ſit praelonga ſimulque ad modum figurae ſextae oſcilletur, fiet C B dupla ipſius B H et longitudo penduli ſimplicis iſochroni

chroni eſt aequalis quartae parti longitudinis fili virgam ſuspendentis. Igitur ſic virgae longiores breuioresque, modo ex eodem filo breuiſſimo ſuspendantur, in hoc oſcillationum genere iſochronae ſunt.

§. 13. Denique etiam exemplum dabo virgae vniformis ex puncto aliquo intermedio ſuſpenſae. Ponamus itaque longitudinem virgae $m = 3$, putemusque diſtantiam puncti ſuſpenſionis D vel C. (fig. 7. et 8.) a ſum mitate virgae $= 1$, longitudinem autem fili DA vel CA expreſſam per $n = 2$; hae poſitiones faciunt $g = \frac{1}{2}$ et $L = 2$ hincque fit pro oſcillationibus tardioribus, quae ad norman figurae ſeptimae perficiuntur, $\alpha = 1$, ſic vt in hoc exemplo ſummitas virgae veluti immobilis maneat nec a ſitu lineae verticalis recedat, ſtatim atque oſcillationes factae ſunt vniformes: erit autem longitudo penduli ſimplicis iſochroni aequalis ipſi longitudini virgae, id eſt, $l = 3$. At vero pro altera oſcillationum claſſe, quae figurae octavae reſpondent, fit $\alpha = -1$ et longitudo penduli iſochroni aequalis tertiae parti longitudinis virgae, ſiue $l = 1$. Tab. II.

§. 14. Poſtquam ſic generaliſſime hoc argumentum expediuimus, pro linea recta vtcunque inaequaliter graui, facillimum eſt ſolutionem extendere ad plana et ad corpora qualiacunque, imo non difficile eſt videre, ſolutionem cum ea quam dedimus, prorſus eandem eſſe: cum enim, vt hoc ſolum moneam, oſcillationes noſtrae compoſitae ſint ex duabus oſcillationum ſimplicium claſſibus, nimirum fili circa punctum A et virgae circa punctum D, perſpicuum eſt, neutram mutari, ſi loco virgae filo in D appendatur planum vel corpus quodcunque, cuius tam centrum grauitatis, quam centrum oſcillationis, quum

punctum ſuſpenſionis D vt fixum conſideratur, eadem manent. Erunt itaque aequationes noſtrae pro α et l ſemper verae ſi per n intelligatur diſtantia inter duos axes horizontales ac parallelos per puncta A et D tranſeuntes, ſique ſimul pet L intelligatur diſtantia centri oſcillationis ab axe per punctum C aut D tranſeunte, cum axis iſte immobilis eſt, et ſi denique pro g ſubſtituatur diſtantia centri grauitatis a praefato axe per punctum C aut D tranſeunte.

§. 15 Sic igitur problemati noſtro ſecundum totam eius extenſionem ſatisfactum eſt, indeque ſimul illuſtratam atque confirmatam puto ſententiam noſtram, in omni ſyſtemate oſcillationes compoſitas, quarum ſingularum duratio et excurſionis magnitudo a ſe inuicem pendent, vtcunque ſtatim ſint inaequales et perturbatae, tandem fieri vniformes et inter ſe tautochronas: ſaltem hoc certum eſt, poſſe ſingularum oſcillationum excurſionibus talem aſſignari proportionem, ſiue excurſiones iſtae maiores ſiue minores ſint per ſe, vt cum ſingulae ſimul incipiunt, ſimul etiam finiantur, atque ſic conſtanter vniformes et inter ſe tautochronae permaneant.

EMEN-

EMENDATIO TABVLARVM ASTRONOMICARVM PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quemadmodum ex tribus planetae cuiusque primarii locis heliocentricis cum integro tempore periodico comparatis orbita planetae inueſtigari atque tabulae aſtronomicae confici queant, in Comment. Tomo VII. fuſius expoſui. Cum autem non ſolum difficile ſummopere ſit loca heliocentrica ex obſeruationibus eruere, ſed etiam ad orbitarum determinationem loca tam exquiſita nullique vel minimo errori obnoxia requirantur, methodus ibi tradita neque ſemper neque ſatis tuto ad hoc inſtitutum adhiberi poteſt. Atque hanc ob cauſam iam illo tempore ad orbitam ſolis vel potius terrae definiendam potiſſimum adſtruxi, eo quod ſingula ſolis loca geocentrica obſeruata totidem praebeant terrae loca heliocentrica, quae adeo ſatis copioſe exhiberi poſſunt. Tab. II.

§ 2. Ad loca autem heliocentrica planetarum primariorum accurate obſeruanda tot diligentiſſime inſtitutis obſeruationibus tantaque circumſpectione opus eſt, vt non

ſacile pro quouis planeta terna tantum eiusmodi loca ex tanta obſeruationum multitudine deriuari queant. Neque vero ad iſtud inſtitutum ternae obſeruationes quaecunque heliocentricae ſunt accommodatae, ſed eiusmodi tria loca requiruntur, quae in orbita planetae ſatis a ſe inuicem ſint remota, ex quo intelligitur maiorem locorum heliocentricorum numerum pro ſingulis planetis requiri, quo delectus ternarum obſeruationum maxime idonearum inſtitui queat.

§. 3. Tres autem omnino habentur modi ex obſervationibus planetarum loca heliocentrica concludendi, qui omnes abſolutam ac perfectam ſolis theoriam poſtulant: quam quidem tanquam ſatis cognitam aſſumere licet, cum ea per methodum ante expoſitam ex obſeruationibus exactiſſime colligi queat. Primus modus conſiſtit in obſervatione oppoſitionis cuiusque planetae cum ſole, qui vero tantum ad planetas ſuperiores patet, cum in inferioribus oppoſitio ſolis nunquam contingat. Neque vero oppoſitio planetarum reſpectu ſolis immediate obſeruari poteſt, ſed ea demum ex pluribus obſeruationibus circa oppoſitionis tempus inſtitutis deriuari debet. Ex huiusmodi ſcilicet obſeruationibus per computationem verum momentum temporis, quo planeta ſoli e diametro opponitur, definitur, quo ipſo momento locus terrae heliocentricus cum planetae loco heliocentrico congruet; ſiquidem planeta in ipſa ecliptica moueri ponatur. Quodſi autem planeta cum latitudine obſeruetur, tum iſtud momentum oppoſitionis ex obſeruationibus collectum vlteriore correctione indiget, vt vera oppoſitio ſecundum longitudinem inueniatur, in quo negotio ipſa iam planetae theoria quaſi cognita aſſumi debet.

§. 4.

§. 4. In planetis inferioribus Venere et Mercurio quia oppoſitiones cum ſole non contingunt, eorum coniunctiones cum ſole diligenter ſolent obſeruari: ex his enim pari modo loca heliocentrica deriuari poſſunt. Interim tamen iſtiusmodi obſeruationes ob ſummam horum planetarum et ſolis propinquitatem hoc tempore perraro et non ſatis accurate inſtitui poſſunt. Quare ex hoc obſeruationum genere in iis tantum maxima fiducia poni poteſt, in quibus iſti planetae in ipſo ſolis diſco conſpiciuntur. Hoc autem non ſolum rariſſime euenit, ſed etiam iis tantum temporibus, quibus hi planetae nodis ſuis ſunt proximi; ex quo per hanc viam duo tantum loca heliocentrica in orbita planetae diuerſa elicere licet, quae ad theoriam ſtabiliendam non ſufficiunt. Neque vero ex planetarum inferiorum elongationibus maximis a ſole obſeruatis loca heliocentrica deduci poſſunt, niſi orbitae planetarum circulares aſſumantur, quae poſitio pro Mercurio a veritate nimium abhorret. Ex quibus clariſſime perſpicitur, quam parum vtilitatis loca planetarum heliocentrica ex oppoſitionibus et coniunctionibus cum ſole collecta ad noſtrum inſtitutum afferre queant.

§. 5. Alter modus loca heliocentrica planetarum ex obſeruationibus aſtronomicis concludendi, in obſeruatione latitudinis cuiusque planetae conſiſtit; ex qua ſi tam loci nodorum quam inclinatio orbitae planetae ad planum eclipticae iam ante fuerit cognita, locus planetae heliocentricus vtique colligi poteſt, quemadmodum oſtenditur in Aſtronomica Gregorii. Sed quamuis haec requiſita exactiſſime eſſent cognita, tamen vel minimus error in obſeruatione commiſſus, qui euitari nullo modo poteſt, concluſionem

cluſionem maxime incertam reddet. Primum enim manifeſtum eſt, ſi planetae orbita ab ecliptica prorſus non diſcreparet, per hanc methodum nihil omnino ad locum heliocentricum determinandum, inferri poſſe; ex hoc vero ſponte ſequitur, ſi inclinationes orbitarum admodum ſint exiguae vti reuera ſunt, tum iſtam methodum ingentibus erroribus obnoxiam eſſe oportere; ita vt ea in noſtro inſtituto, in quo exactiſſima loca heliocentrica deſideramus, nullius plane vſus eſſe poſſit.

§. 6. His autem duobus modis expoſitis loca heliocentrica planetarum inueſtigandi, tertius modus longe anteferendus eſſe videtur, qui neque latitudinem planetae ſpectat, neque determinatum ſitum reſpectu ſolis requirit. Tempus autem periodicum planetae, cui iſte modus accommodatur, accuratiſſime cognitum ac determinatum eſſe oportet, id quod ex tot obſeruationibus tam longo temporis interuallo factis, ſatis exacte colligi poteſt. Quodſi enim binae eiusmodi planetae obſeruationes eligantur, quae integro tempore periodico a ſe inuicem diſtant, certum erit planetam vtraque obſeruatione in eodem orbitae ſuae loco verſatum eſſe, etiamſi ex terra in diuerſis coeli locis conſpiciatur. Ex hac ipſa autem differentia locorum geocentricorum verus locus heliocentricus facile concluditur. Interim tamen haec methodus alias tutiſſima hoc habet incommodi, quod difficulter et raro ad datum quoduis temporis momentum ſitus cuiusque planetae in coelo obſeruari poſſit.

§. 7 Cum igitur loca heliocentrica planetarum vel non ſatis exacta, qualia requirimus, exhiberi queant, vel tanta temporum opportunitas ad ea definienda poſtuletur,

qualis

qualis raro contingere ſolet, in eam incidi cogitationem, quemadmodum per loca quaecunque geocentrica orbitae planetarum determinari, ac tabulae aſtronomicae confici queant. Quanquam autem mox intellexeram, problema hoc eſſe determinatum; atque ex aliquot locis geocentricis orbitas planetarum determinari, tamen ipſa ſolutio tantopere fit difficilis et moleſtiſſimis calculis implicata, vt ea nullo modo ad finem perduci, multo minus ad vſum accommodari queat. Perſpicuum quidem eſt praeter tempus periodicum planetae cognitum tria loca geocentrica ad problema determinandum ſufficere, verum, quia quivis locus geocentricus primum loco ſolis, et deinde tam longitudine quam latitudine planetae definiri debent, tot quantitates diuerſae in calculum introduci debent, vt is non maxime intricatus fieri omnino nequeat.

§. 8. Poſtquam autem cogitaſſem orbitas planetarum nunc quidem non adeo eſſe incognitas, vt earum inueſtigatio a primis principiis repeti debeat, motusque ipſorum planetarum omnino ignoretur; ſed non ſolum tempora periodica per plurimas obſeruationes accuratiſſime iam eſſe definita, verum etiam ipſas orbitas ſatis prope cognitas haberi: ex his ſi debito modo in calculum inferantur, facile proſpexi, laborem vehementer ſubleuari poſſe. Quando enim non tam verus planetarum motus ex ſolis obſeruationibus, quam eius tantum aberratio a theoria iam ſtabilita, quae minima eſt, indagatur, calculus ex eo principio facilior reddetur, quod errores theoriae ſeu tabularum aſtronomicarum tanquam quantitates infinite paruae tractari queant, quo ipſo formulae et aequationes alias intricatiſſimae ſatis planae et ſimplices fieri ſolent.

§. 9. Negotium igitur, quod in hac diſſertatione mihi expediendum ſumſi, in hoc conſtat, vt tabulas aſtronomicas vſu receptas, quae quidem ad veram theoriam motus planetarum ſint conſtructae, per aliquot obſeruationes ſeu loca geocentrica corrigam, atque definiam, quantum illae a veritate diſſentiant; errore enim cognito tabulae etiam maxime vitioſae facili negotio emendabuntur. In hoc autem inſtituto ipſas aberrationes tabularum a veritate, in quas inquiro, tanquam quantitates infinite paruas ſeu differentiales ſum contemplaturus, ita vt termini, in quibus earum plures dimenſiones occurrunt, tuto negligi queant. Videndum igitur erit, quantum loca planetae obſeruata a locis, quae tabulae pro iisdem temporibus ſuppeditant, cum ſecundum longitudinem tum latitudinem differant, quae ipſa diſcrimina tam erunt exigua, vt inſtar quantitatum differentialium tractari queant; deinde ex his ipſis differentiis definiri debebit, quantum et quibus in locis tabulae immutandae ſint, vt cum obſeruationibus perfectiſſime conſentiant.

§. 10. Quoniam autem orbitae planetarum determinari ex obſeruationibus terreſtribus non poſſunt, niſi orbita terrae perfecte ſit cognita, eam hic tanquam perfecte cognitam aſſumo, ita vt eius ope locus ſolis ad quodvis tempus ſine vllo errore aſſignari queat. Ad motum quidem ſolis definiendum maxime accommodata eſt methodus ſupra memorata determinandi orbitas planetarum ex tribus locis heliocentricis; verum tamen hic quoque modum trademus theoriam ſolis quamcunque, ſi correctione egeat, per obſeruationes corrigendi. Hocque modo etiam

etiam facilius vera ſolis theoria obtinebitur, quam ſi ea omnino a priori indagari deberet.

§, 11. Deinde etiam data pono ſingulorum planetarum tempora periodica, quippe quae ex tot ſeculorum interuallo inſtitutis obſeruationbus multo accuratius ſunt definita, quam per obſeruationes nunc inſtituendas vel exquiſitiſſimas expectari poſſet. Ex datis autem temporibus periodicis planetarum ſimul ratio, quam inter ſe tenent orbitarum axes trasuerſi, ſeu diſtantiae a ſole mediae, innoteſcit; omnino enim ſequi conueniet theoriam motus planetarum a Newtono ſtabilitam. Hanc autem theoriam ſecuturus ſingulorum planetarum tam aphelia quam nodos reſpectu ſtellarum fixarum quieſcere aſſumo; ſeu ipſis reſpectu aequinoctiorum motum ipſi praeceſſioni aequinoctiorum aequalem tribuo. Quae aſſumtio vti rationi maxime eſt conſentanea, ita etiam cum obſeruationibus apprime conſentit. neque, vti quibusdam aſtronomis videtur, per obſeruationes refellitur,

§. 12. Quodſi nunc tabulas aſtronomicas contemplemur, ex quibus loca planetarum ſupputari ſolent, deprehendemus eas quinque rebus ex obſeruationibus deſumtis niti, totidemque propterea nominibus erroneas eſſe poſſe. Primum enim error in loco aphelii aſſumto ineſſe poteſt, ita vt eius vera longitudo vel maior ſit vel minor, quam in tabulis ponitur. Secundo excentricitas orbitae ſeu ſolis diſtantia a centro orbitae vel nimis magna vel nimis parua aſſumta eſſe poteſt. Tertio vero error ineſſe poteſt in anomalia media, quae ad datam aeram conſtituitur: ita vt ea vel maior ſtatui debeat vel minor, qui error ſi quis fuerit deprehenſus pro quouis tempore idem manebit, ſi quidem tempus perio-

dicum recte eſt aſſumtum. Quarto loca nodorum in tabulis aſſignata poſſunt eſſe vitioſa, etſi his maxime fidere poſſe videmur. Quinto denique euenire poteſt, vt inclinatio orbitae ad eclipticam, quae in tabulis ponitur, a veritate recedat. Fieri igitur poteſt, vt tabulae aſtromicae quintuplici correctione opus habeant.

§. 13. Vnus autem planetae locus ex obſeruationibus deductus duplici modo a tabulis diſſentire poteſt ratione ſcilicet vel longitudinis vel latitudinis. Quare ſi ſinguli diſſenſus obſeruationum a tabulis ad totidem tabularum errores detegendos ſufficiant, bina alicuius planetae loca geocentrica obſeruata non erunt ſufficientia ad quinque errores corrigendos, terna autem non ſolum omnes errores, qui in tabulis ineſſe poſſint, patefacient et corrigent, ſed vna etiam conditio redundabit, quae ad confirmationem emendationis inſtituendae adhiberi poteſt. Ita ſe res habet ſi quinque erroribus tabulae ſint obnoxiae, ex quo videri poſſet, paucioribus obſeruationibus negotium expediri poſſe, ſi inclinatio et nodi recte conſtituti ſint in tabulis: nihilo tamen minus etiam tum tribus opus erit obſeruationibus, cum ipſae obſaruationes veritatem nodorum et inclinationis orbitae in tabulis aſſumtae declarare debeant.

§. 14. Ponamus iam pro quocunque planeta cuius correctio ſuſcipitur, eius diſtantiam a ſole mediam ſeu orbitae ipſius ſemiaxem transuerſum eſſe $= a$ cuius quantitas, quia a ſolo tempore periodico pendet in tabulis recte aſſignata ponitur, ita vt correctione non egeat. Deinde ſit excentricitas ſeu diſtantia ſolis a centro orbitae ad diſtantiam mediam applicata, qualis in tabulis habetur $= k$, vera autem excentricitas ſit $= k + dk$. Tertia anomalia

malia media in tabulis ad quoduis tempus exhibita ita a veritate diſcrepet, vt ea perpetuo augeri debeat angulo dm. Quarto ſit longitudo aphelii in tabulis exhibita, atque a prima ſtella arietis computata $= p$, vera autem eiusdem aphelii longitudo ſit $= p + dp$. Quinto ſit longitudo nodi aſcendentis in tabulis poſita a prima pariter ſtella arietis computata $= q$; at vera eiusdem nodi longitudo ſit $q + dq$. Sexto denique ſit inclinatio orbitae planetae ad planum eclipticae, quae in tabulis indicatur $= n$; vera autem inclinatio ſit $= n + dn$.

§. 15. Ex tabulis ergo aſtronomicis quibusque habentur valores literarum a, k, n, p et q, ex quibus diſtantiam mediam a ex tempore periodico deductam reliquas litteras vero vndecunque ex obſeruationibus concluſas eſſe pono. Praeter hos vero valores nihil quicquam ex tabulis deſumam; aequationem enim anomaliae mediae vel addendam vel ſubtrahendam non ex tabulis deſumam, ſed ipſe quouis caſu calculo definiam, non tam quaſi tabulis aequationum parum confiderem, quam quia iſte ipſe calculus quo aequatio anomaliae definitur, ad correctiones inſtituendas requiritur. Correctio autem in hoc conſiſtet, vt errores tabularum a veritate, quos his expreſſionibus differentialibus dk, dm, dp, dq et dn denotaui, determinem; hoc enim facto, dubium erit nullum, quin tabulae perfectiſſime ſint emendatae, ſi quidem obſeruationibus certiſſimis ad has correctiones vtamur.

§. 16. Eiusmodi autem obſeruationes adhiberi conuenit, quibus planetae ad datum tempus tam longitudo quam latitudo contineatur; ſit igitur pro definito quodam tempore longitudo planetae ex obſeruationibus deducta =

F, quae pariter a prima ſtella arietis ſit computata, latitudo vero ſit $= G$. Ad idem vero tempus locus planetae ex tabulis ſupputetur, ſitque longitudo ex tabulis inuenta $= f$, latitudo autem $= g$. Quodſi vero tabulis correctis vti liceret, foret longitudo $= f + df$, et latitudo $= g + dg$, quae perfecte cum obſeruationibus conſentire deberent; erit itaque $F = f + df$ atque $G = g + dg$, hincque $df = F - f$ et $dg = G - g$. Cognoſcentur igitur iſti valores df et dq, quos tanquam differentialia ſpecto, ex comparatione tabularum aſtronomicarum cum obſeruationibus; iidem vero ex aſſumtis tabularum erroribus dk, dm, dp, dq, et dn definiri poterunt; vnde viciſſim errores tabularum per obſeruationes dignoſci, ipſaeque tabulae corrigi poterunt.

§. 17. Cum igitur habetur obſeruatio planetae omnibus numeris abſoluta, ad id tempus, quo obſeruatio eſt facta, locus planetae hoc eſt eius longitudo ac latitudo ex tabulis ſupputetur; quas litteris f et g deſignaui. Quod ſi autem valores f et g ex tabulis eruantur, compoſiti erunt ex litteris cognitis, quibus tabulae ſunt ſuperſtructae, ſcilicet a, k, p, q et n, eruntque harum litterarum quaſi functiones. Ex his vero ipſis valoribus per calculum differentialem definiri poterunt longitudo $f + df$ et latitudo $g + dg$, ponendo $k + dk$; $p + dp$; $q + dq$; $n + dn$ loco k, p, q et n, atque anomaliam mediam tabularem augendo angulo dm, etiamſi ipſae qnantitates hae differentiales dk, dp, dq, dn et dm ſint per ſe incognitae. Quoniam auten longitudo $f + df$ et latitudo $g + dg$ ex tabulis correctis nata cum longitudine et latitudine obſeruata congruere debet, hae differentiae df et dq ex diſcrimine tabula-

tabularum et obſeruationis primum cognoſcentur, eaedem vero etiam per correctiones adhibendas determinabuntur, vnde huius modi binae aequationes ex qualibet obſeruatione conficientur

$$df = \mathrm{A}\, dm + \mathrm{B}\, dk + \mathrm{C}\, dp + \mathrm{D}\, dq + \mathrm{E}\, dn$$
$$dg = \alpha\, dm + \beta\, dk + \gamma\, dp + \delta\, dq + \varepsilon\, dn$$

atque cum ex tribus obſeruationibus ſex huiusmodi aequationes oriantur, eae abunde ſufficient ad valores differentiales dm, dk, dp, dq et dn determinandos, quibus determinatis tota tabularum aſtronomicarum correctio erit abſoluta.

§. 18. Videamus igitur quemadmodum ex iis rebus datis, quibus tabulae inniti ſolent, et quas litteris a, k, p, q et n indicauimus, ad datum tempus planetae tam longitudo quam latitudo computari debeat. Ad datum igitur tempus ante omnia tabulae praebent planetae anomaliam mediam, quae ſit $= x$, qua cognita inueſtigari debet anomalia excentri, quam tantisper littera v indicemus. Ita autem haec anomalia excentri cum anomalia media eſt connexa vt ſit $x = v + k$ ſin. v ex qua aequatione quidem data anomalia excentri, anomalia media per transmutationem ſinuum in arcus facile definitur. At viciſſim ex anomalia media, excentri anomalia per hanc aequationem determinabitur $v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc. quae etſi eſt infinita, tamen facili negotio valorem ipſius v tam prope ſuggerit, quam quidem ad inſtitutum requiri poteſt. In circulo ſcilicet, cuius radius eſt 1. quaeritur arcus aequalis ipſi k ſin. x. isque ab anomalia media x ſubtrahatur; reſidui arcus denuo ſumatur ſinus, eique per k multiplicato arcus capiatur aequalis,

qui

qui denuo ab anomalia media x auferatur: arcus reſidui iterum ſinus ſumatur, eique per k multiplicato arcus aequalis ſumatur, ab anomalia media x ſubtrahendus; haecque operatio tam diu repetatur, quoad reſidui arcus amplius neque creſcant neque decreſcant, quod ſi euenerit, id quod ſemper ante quartam operationem continget, vltimum reſiduum dabit valorem anomaliae excentri v. Interim in hoc negotio annotari oportet, quod ſi anomaliae mediae ſinus fuerit negatiuus, arcus inde natos quoque futuros eſſe negatiuos, ac propterea ab z non ſubtrahi, ſed ad id addi debere; quod ei, qui in calculo eſt exercitatus nullam pariet difficultatem, Ex tabulis itaque ad datum tempus planetae cognoſcitur anomalia media, atque ex hac coniunctim cum excentricitate k reperietur anomalia excentri v.

§. 19. Cognita anomalia excentri v, ex ea primum facillime colligitur vera planetae diſtantia a ſole, vel eius ratio ad diſtantiam mediam a; poſita enim planetae diſtantia a ſole $= y$, erit $y = a(1 + k \text{ coſ. } v)$ Deinde etiam ex anomalia excentri v inueniri poteſt vera anomalia planetae, ſeu eius ab aphelio diſtantia ex ſole viſa; quodſi enim planetae anomalia vera ponatur $= z$, poterit ſatis commode valor ipſius z ex hac aequatione etſi infinita expedite determinari, qua eſt $z = v - k \text{ ſin. } v + \frac{1}{4}k^2 \text{ ſin. } 2v - \frac{1}{12}k^3(\text{ſin. } 3v + 3 \text{ ſin. } v) + \text{etc.}$ aptior autem ad praeſens inſtitutum eſt haec aequatio, qua valor ipſius z abſolute reperitur; qua eſt $\text{coſ. } z = \frac{k + \text{coſ. } v}{1 + k \text{ coſ. } v} = \frac{a}{y}(k + \text{coſ. } v)$ ob $y = a(1 + k \text{ coſ. } v)$: vel per ſinus verſos hoc modo: $\text{ſinv. } z = \frac{(1-k) \text{ ſinv. } v}{1 + k \text{ coſ. } v}$; vel etiam per ſinus ita: $\text{ſin. } z = \frac{\text{ſin. } v \cdot \sqrt{(1-k^2)}}{1 + k \text{ coſ. } v} = \frac{a}{y} \text{ ſin. } v \cdot \sqrt{(1 - k^2)}$.

§. 20.

§. 20. Ex anomalia vera hoc modo inuenta, atque ex datis orbitae planetae aphelio, nodo aſcendente, et inclinatione ad eclipticam porro planetae longitudo ac latitudo heliocentrica ſequenti modo definientur: Repraeſentet circulus ♈Nap ♎ in cuius centro S ſol verſatur eclipticam et NAPn orbitam planetae in coelo proiectam; ſitque ♈ prima ſtella arietis ſeu potius eius locus ad eclipticam relatus, N orbitae planetae nodus aſcendens, A aphelium orbitae planetae, et P eius locus, quem pro dato tempore tabulae monſtrant. Centro porro S per A et P arcus circulares Aa et Pp normales ad eclipticam ducantur, quorum ille Aa ſeu potius angulus ASa latitudinem aphelii heliocentricam, hic vero Pp ſeu angulus PSp ipſius planetae in P verſantis latitudinem heliocentricam praebet. Longitudo autem heliocentrica a prima ſtella arietis ♈ computata primum nodi aſcendentis N erit arcus ♈N $= q$; deinde aphelii A arcus ♈$a = p$ ipſius autem planetae in P exiſtentis longitudo heliocentrica erit arcus ♈Nap; orbitae vero ad eclipticam inclinatio quam poſuimus $= n$, repraeſentatur angulo ANa ſeu PNp. Tab. II. fig. 9.

§. 21. Anomalia autem vera planetae z eſt arcus AP ſeu angulus ASP. Quare cum ſit N$a = p - p$ ex triangulo ſphaerico ANa elicitur arcus NA tangens $= \frac{tang.(p-q)}{coſ.\, n}$, hincque erit NA $=$ arcui, cuius tangens erit $= \frac{tang.(p-q)}{coſ.\, n}$; quem arcum, quia tam facile reperitur ponamus $= e$ ita vt ſit NA $= e$, et $tang.\, e = \frac{tang.(p-q)}{coſ.\, n}$. Cum nunc ſit arcus AP $= z$ erit arcus NAP $= e + z$, vnde reperitur tang. arcus N$ap =$ coſ. n. tang. $(e+z)$; ponatur iſte arcus N$ap = r$, ita vt ſit tang. $r =$ coſ. n. tang. $(e+z)$, erit

$q + r$ longitudo planetae heliocentrica a prima ſtella arietis ♈ computata. Praeterea vero erit arcus Pp ſeu anguli PSp ſinus $=$ ſin. n. ſin. $(e + z)$, qui eſt ſinus latitudinis heliocentricae planetae ad boream declinantis; ſi quidem ea eſt affirmatiua. Ponamus autem hanc planetae latitudinem heliocentricam eſſe $= s$, erit ſin. $s =$ ſin. n. ſin. $(e + z)$.

§. 22. Vt haec facilius ſub conſpectum cadant, omnia in ſequenti tabella complecti viſum eſt. Erit igitur

Diſtantia planetae media a ſole $= a$
Excentricitas $= k$
Aphelii longitudo helioc. $= p$
Nodi aſcendentis longit. $= q$
Inclinatio orbitae $= n$

Porro ad datum tempus ponatur.

Plan. anom. med. $= x$	$x = v + k$ ſin. v vel
Anomal. excent. $= v$	$v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc.$)$
Diſtantia a ſole $= y$	$y = a(1 + k$ coſ. $v)$
Anomalia vera $= z$	coſ. $z = \frac{a}{y}(k +$ coſ. $v)$
Diſt. aph. a Nodo $= e$	tang, $e = \frac{\text{tang.}(p - q)}{\text{coſ.} n}$
Long. Plan. a nodo $= r$	tang. $r =$ coſ n tang. $(e + z)$
Long. plan. heliocentr. a pr. ✳ ♈ $= q + r$	
Lat. plan. heliocentrica boreal. $= s$	ſin. $s =$ ſin. n. ſin $(e + z)$

§. 23. Inuentis autem cum longitudine planetae, tum etiam latitudine heliocentrica, ex iis ſequenti modo longitudo et latitudo geocentrica determinabitur. Sit T ter-

rae

rae locus eo momento, quo obſeruatio eſt facta, eius diſtantia a ſole $= c$; longitudo terrae a prima ſtella arietis computata ſeu angulus ♈ S T $= n$, ſit porro vt ante recta SN linea nodorum orbitae planetae, atque N eius nodus aſcendens, A aphelium, et P locus planetae ex tabulis in orbita inuentus. Ex P demittatur in planum eclipticae perpendiculum Pp, erit per praecedentia angulus ♈ Sp longitudo planetae heliocentrica $= q + r$: et angulus PSp ſeu latitudo heliocentrica $= s$. Quare cum ſit PS diſtantia planetae a ſole $= y$, erit $Pp = y\,\text{ſin.}\, s$, et diſtanta a ſole curtata $Sp = y\,\text{coſ.}\, s$. Iam in triangulo pST dantur, angulus $pST = u - q - r$, latus $pS = y$ coſ. s, et latus $ST = c$. Ducto ergo ex p in ST perpendiculo pV, erit $pV = y\,\text{coſ}\, s.\ \text{ſin.}\,(u - q - r)$, et S $V = y\,\text{coſ.}\, s.\,\text{coſ}\,(u - q - r)$ vnde $TV = y\,\text{coſ.}\, s.\ \text{coſ.}\,(u - q - r) - c$. Ex his fit anguli pTV tangens $= \frac{y\,\text{coſ.}\, s.\ \text{ſin.}\,(u - q - r)}{y\,\text{coſ.}\, s.\,\text{coſ.}\,(u - q - r) - c}$. Vocetur hic angulus $pTV = t$, ita vt ſit tang $t = \frac{y\,\text{coſ.}\, s.\,\text{ſin.}\,(u - q - r)}{y\,\text{coſ.}\, s.\,\text{coſ.}\,(u - q - r) - c}$. Quo inuento erit $u - t$ longitudo planetae geocentrica a prima ſtella arietis ſumta. Deinde eſt $Tp = \frac{y\,\text{coſ.}\, s.\ \text{ſin.}\,(u - q - r)}{\text{ſin.}\, t}$, vnde oritur $\frac{Pp}{Tp} = \frac{\text{ſin.}\, s.\ \text{ſin.}\, t}{\text{coſ.}\, s.\,\text{ſin}\,(u - q - r)} = \frac{\text{ſin.}\, t\ \text{tang.}\, s}{\text{ſin.}\,(u - q - r)}$, quae expreſſio praebet tangentem latitudinis planetae geocentricae ſeu anguli PTp. Haec autem ſic coniunctim ſe habebunt.

Diſtantia terrae a ſole	$= c$	
longitudo terrae	$= u$	
angulus quidam pTV	$= t$	tang. $t = \frac{y\,\text{coſ.}\, s.\ \text{ſin.}\,(u - q - r)}{y\,\text{coſ.}\, s.\ \text{coſ.}\,(u - q - r) - c}$
longitudo geocentrica	$= f$	$f = u - t$
latitudo geocentrica	$= g$	tang. $g = \frac{\text{ſin.}\, t.\ \text{tang.}\, s}{\text{ſin.}\,(u - q - r)}$

§. 24. Hoc igitur modo ex poſitionibus, quae in tabulis aſſumuntur, ad datum tempus planetae determinantur longitudo et latitudo, primo quidem heliocentricae, tum vero etiam geocentricae: quae itaque recte ſe habere, et cum obſeruationibus conſpirare deberent, ſi quidem tabulae omni vitio carerent. Quodſi autem ponamus errores quam minimos tabulis ineſſe, ex iis, etſi nobis adhuc incognitis, loca planetae tamen corrigi poterunt. Cum igitur correctiones adhibendas inſtar differentialium earum quantitatum, quibus reſpondent, conſideremus et deſignemus, errores longitudinis et latitudinis planetae ex tabulis inuentae inueniemus, ſi ipſas expreſſiones pro iis erutas more ſolito differentiemus, ponendis iis quantitatibus variabilibus, in quibus errores ineſſe poſſunt. Differentialia autem quae in hoc calculo occurrent erunt haec dm; dk; dp; dq et dn, ex quibus differentialia reliquarum litterarum aſſumtitiarum determinari poterunt. Quoniam autem dm ſignificat errorem anomaliae mediae tabularis addendum, anomalia media ex tabulis inuenta x augeri debebit illa particula dm, ex quo erit $dx = dm$.

§. 25. Quia deinde eſt $x = v + k\,\text{ſin.}\,v$, erit differentiando $dx = dm = dv + dk\,\text{ſin.}\,v + kdv\,\text{coſ.}\,v$ hincque $dv = \frac{dm - dk\,\text{ſin.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v} = \frac{a}{y}(dm - dk\,\text{ſin.}\,v)$. Porro eſt $y = a(1 + k\,\text{coſ.}\,v)$, hincque $dy = adk\,\text{coſ.}\,v - akdv\,\text{ſin.}\,v$. in qua ſi loco dv valor ſuperior ſubſtituatur, prodibit $dy = \frac{adk\,\text{coſ.}\,v + akdk - akdm\,\text{ſin.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v} = adk\,\text{coſ.}\,z - \frac{akdm\,\text{ſi.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v}$. Ex aequatione autem $\text{coſ.}\,z = \frac{k + \text{coſ.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v}$ ſequitur $-dz\,\text{ſin.}\,z = \frac{dk\,\text{ſin.}\,v\,\text{ſin.}\,v - (-k^2)dv\,\text{ſin.}\,v}{(1 + k\,\text{coſ.}\,v)^2}$ quae poſito $(1 + k\,\text{coſ.}\,v)^2 = \frac{(1 - k^2)(\text{ſin.}\,v)}{(\text{ſin.}\,z)^2}$ praebet hanc $dz = \frac{dv\,\text{ſin.}\,z}{\text{ſin.}\,v} - \frac{dk\,\text{ſin.}\,z}{1 - kk} = \frac{adm\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} - \frac{adk\,\text{ſin.}\,z}{y} - \frac{dk\,\text{ſin.}\,z}{1 - kk}$.

§. 26.

§. 26. Dehinc ad differentialia reliquarum litterarum peruenimus, ac primo quidem aequatio tang. $e = \frac{tang.(p-q)}{coſ.n}$. praebet $de = \frac{(dp-dq)coſ.e)^2}{coſ.n(coſ.(p-q))^2} + \frac{dn ſin. n. tang.(p-q)(coſ.e)^2}{(coſ.n)^2}$. Sequens vero aequatio tang. $r =$ coſ. n. tang. $(e+z)$ differentiata dat $\frac{dr}{(coſ.r)^2} = - dn$ ſin. n. tang. $(e+z)$ $+ \frac{(de+dz)coſ.n}{(coſ.(e+z))^2}$, in qua aequatione non expedit valores ſuperiores loco de et dz ſubſtituere, ne formulae nimis fiant intricatae. Interim tamen quouis exemplo oblato minori opera valor ipſius dr per differentialia primitiua dm, dk, dp, dq, et dn poterit definiri. Hoc autem inuento erit longitudinis heliocentricae $q+r$ differentiale $= dq + dr$. Latitudinis autem heliocentricae s differentiale determinabitur per hanc aequationem ds coſ. $s =$ dn coſ. n ſin. $(e+z) + (de+dz)$ ſin. n. coſ. $(e+z)$ Ex his itaque mutationes in longitudine et latitudine heliocentrica, quas quinque tabularum errores aſſumti atque per obſeruationes determinandi producunt, cognoscuntur.

§. 27. Progrediamur igitur ad mutationes in longitudine ac latitudine geocentrica ortas definiendas, quo in negotio, quia ſolis theoriam perfectam ponimus, quantitates locum terrae determinantes, quae ſunt c et u, tanquam conſtantes tractari oportet. Primum autem ad differentiale anguli t aſſignandum vtamur aequatione hac cot. $t =$ cot. $(u-q-r) - \frac{c}{y coſ.s.ſin.(u-q-r)}$ cuius differentiale eſt $\frac{-dt}{(ſin.t)^2} = \frac{dq+dr}{(ſin.(u-q-r))^2} + \frac{cdy}{yy coſ.s ſin.(u-q-r)} - \frac{cds tang.s}{y coſ.s ſin.(u-q-r)}$ $- \frac{c(dq+dr)cot.(u-q-r)}{y coſ.s ſin.(u-q-r)}$. Inuento autem differentiali dt, erit longitudinis geocentricae f incrementum $df = - dt =$ $\frac{(dq+dr)(ſin.t)^2}{ſin.(u-q-r))^2} + \frac{cdy(ſin.t)^2}{yy coſ.s ſin.(u-q-r)} - \frac{cds tang.s (ſin.t)^2}{y coſ.s ſin.(u-q-r)} -$

$\frac{c(dq+dr)\cot.(u-q-r)(\sin.t)^2}{y\cos.s\sin.(u-q-r)}$. Latitudinis autem geocentricae g incrementum cognoſcetur ex hac aequatione differentiali

$$\frac{dg}{(\cos.g)^2} = \frac{ds\sin.t}{(\cos.s)^2\sin.(u-q-r)} - \frac{df\cos.t.\tang.s}{\sin.(u-q-r)} + \frac{(dq+dr)\sin.t.\tang.s}{\sin.(u-q-r)\tang.(u-q-r)}$$

§. 28. Quod ſi autem eo tempore, pro quo iſte calculus eſt factus, per obſeruationes habeatur locus planetae, eiusque longitudo geocentrica a prima ſtella arietis computata ſit $= F$, latitudo autem geocentrica $= G$; correctiones tabulae, quae conſiſtunt in valoribus dm, dk, dp, dq, et dn, ita debebunt eſſe comparatae, vt fiat, $df = F - f$ et $dg = G - g$. Quare cum df et dg ex aberratione tabularum ab obſeruationibus cognoscantur, ex tribus obſeruationibus determinari poterunt ipſa illa differentialia dm, dk, dp, dq et dn, quibus cognitis tabulae etiam correctae habebuntur. Erit ſcilicet pro tabula vera

Planetae diſtantia a ſole media	$= a$.
Excentricitas orbitae	$= k + dk$
Longitudo Aphelii heliocentrica	$= p + dp$
Longitudo nodi aſc. heliocentrica	$= q + dq$
Inclinatio orbitae planetae ad Eclipt.	$= n + dn$

Tabula autem mediorum motuum planetae ita corrigi debebit, vt anomalia media, quam tabulae ad quodvis tempus monſtrant, augeatur angulo dm. Atque hoc pacto tabulae, niſi enormiter a veritate aberrauerint, ita emendabuntur, vt tum perpetuo cum obſeruationibus quam exactiſſime conſentire debeant.

§. 29. Obſeruationes autem, quibus ad hoc propoſitum vti expedit, ſumma diligentia adhibita exquiſitiſſimis inſtrumentis factas eſſe oportet, vt de vero planetae

loco

loco obſeruato omnino certi eſſe queamus, quamobrem hae obſeruationes a refractionibus ante penitus purgari debent, quam ex iis longitudo ac latitudo geocentrica planetae concludatur. Praeter has autem vſitatas cautiones maxime ratio propagationis lucis haberi debet, qua longitudo planetae obſeruata modo augetur modo diminuitur. Niſi enim haec correctio habeatur, motus planetae nequidem talis ſpectabitur, qualis cum theoria planetarum Kepleriana congruit: hancque praecipuam eſſe cauſam exiſtimo, quod etiamnunc per exactiſſimas obſeruationes tabulae aſtronomicae cum obſeruationibus penitus conciliari non potuerint. Viciſſim autem ſi tabulae prorſus ſint correctae, loca planetarum ex iis per calculum deducta non immediate cum obſeruationibus comparari conuenit, verum ea quoque in loca apparentia antea conuerti debent, adhibita ea correctione, quam propagatio lucis ſuppeditat: qua de re in ea diſſertatione, qua phaenomena a propagatione lucis ſucceſſiua oriunda expoſui, ſuſius egi.

§. 30. Aequatio autem ex propagatione lucis orta pro terra ita ſe habet, vt longitudo terrae obſeruata perpetuo augeri debeat $20''$ quo facto is prodit terrae vel ſolis locus, in quo appareret, ſi lumen in inſtanti propagaretur. Ex cuiusuis autem planetae loco obſeruato locus verus, in quo conſpiceretur, ſi lumen in inſtanti ad nos perueniret, per ſequentem regulam eruetur. A loco planetae in ecliptica obſeruato, ſeu eius longitudine geocentrica obſeruata ſubtrahatur longitudo terrae, quam eo tempore obtinet, reſiduique arcus ſinus ſit $= \mu$, coſinus $= m$: tum quaeratur angulus cuius ſinus eſt $= \frac{\mu a}{b}$ eiusdemque anguli capiatur coſinus, qui ſit $= q$: ſeu a lon-

longitudine planetae geocentrica ſubtrahatur longitudo planetae heliocentrica et reſidui arcus capiatur coſinus, qui erit q, quo facto ad longitudinem planetae obſeruatam addi oportebit angulum, cuius ſinus eſt $\frac{s}{c}q - \frac{r}{c}m$. In his expreſſionibus denotat a diſtantiam terrae mediam a ſole, b diſtantiam planetae mediam a ſole; eſtque poſito $l\,a = 6,0000000$, pro ſingulis planetis vt ſequitur.

pro Saturno $l\,b = 6,9794600$
pro Ioue $l\,b = 6,7160965$
pro Marte $l\,b = 6,1829850$
pro Venere $l\,b = 5,8593365$
pro Mercurio $l\,b = 5,5878232$

Praeterea habet fractio $\frac{c}{r}$ valorem conſtantem, quo eſt
$l\frac{c}{r} = 4,0201540$
altera autem fractio $\frac{s}{c}$ pro ſingulis planetis peculiares induit valores, erit enim

pro Saturno $l\frac{c}{s} = 4,5098840$
pro Ioue $l\frac{c}{s} = 4,3782022$
pro Marte $l\frac{c}{s} = 4,1116465$
pro Venere $l\frac{c}{s} = 3,9498222$
pro Mercurio $l\frac{c}{s} = 3,8140656$

Calculus autem pro angulo illo addendo fiet facilior, ſi a logarithmis ſinuum $\frac{s}{c}q$ et $\frac{r}{c}m$ ſubtrahatur hic logarithmus conſtans $4,6855749$, reſiduorumque logarithmorum quaerantur numeri reſpondentes, qui praebebunt partes aequationis $\frac{c}{s}q$ et $\frac{r}{c}m$ in minutis ſecundis.

§. 31. Accommodemus nunc methodum hanc tabulas aſtronomicas corrigendi ad theoriam motus ſolis ſeu terrae

terrae emendandam; ſitque pro dato tempore longitudo terrae obſeruata $= F$, latitudo vero erit nulla. Si nunc ponatur in tabulis

Terrae diſtantia media a ſole $= a$
Excentricitas orbitae terrae $= k$
Longitudo aphelii $= p$.

Quae eſt longitudo perigaei ſolis.

Ad tempus obſeruationis ſit porro
Anomalia media ſolis $= x$
Anomalia excentri $= v$
Anomalia vera ſolis $= z$

Ex his ergo erit longitudo terrae $= p + z$, quae poſita eſt $= f$. Eſt autem vt vidimus $x = v + k \text{ſin.} v$ vel $v = x - k \text{ſin.} (x - k \text{ſin.}) (x - k \text{ſin.} (x - k \text{ſin.} (x - \text{etc.})$ et $\text{coſ.} z = \frac{a}{y} (k + \text{coſ.} v)$ exiſtente y terrae a ſole diſtantia hoc tempore, quae eſt $y = a (1 + k \text{coſ.} v)$.

§. 32. Ponamus autem tabulas has eſſe vitioſas, atque ad conſenſum cum veritate impetrandum anomalias medias augeri debere angulo dm; excentricitatem k elemento dk, et longitudinem aphelii p arculo dp. His autem correctionibus in tabulas introductis prodibit ad tempus obſeruationis

anomalia media ſolis $= x + dx = x + dm$
anomalia excentri $= v + dv = v + \frac{dm - dk \,\text{ſin.}\, v}{1 + k \,\text{coſ.}\, v}$.
diſtantia a terra $= y + dy = y + e\,dk \,\text{coſ.}\, z - \frac{ak\,dm \,\text{ſin.}\, v}{1 + k \,\text{coſ.}\, v})$
anomalia vera $= z + dz = z + \frac{adm \,\text{ſin.}\, z}{y \,\text{ſin.}\, v} - \frac{adk \,\text{ſin.}\, z}{y}$
$- \frac{dk \,\text{ſin.}\, z}{1 - kk}$

longitudo igitur terrae ex his tabulis correctis prodibit $= p + z + dp + dz = f + df$, quae cum longitudine

obſer-

obſeruata F congruere debet. Ex obſeruatione ergo habebitur $df = F - f = dp + dz = dp + \frac{adm\,ſin.\,z}{y\,ſin.\,v} - \frac{adk\,ſin.\,z}{y} - \frac{dk\,ſin.\,z}{1-kk}$. Obſeruatio igitur cum calculo ſecundum tabulas inſtituto comparata dat $df = F - f$, vnde ad tabulas corrigendas obtinetur ſequens aequatio

$$df = dp + \frac{adm\,ſin.\,z}{y\,ſin.\,v} - \frac{adk\,ſin.\,z}{y} - \frac{dk\,ſin.\,z}{1-kk}.$$

Tres igitur huiusmodi aequationes ex tribus obſeruationibus ſolis formatae ſufficient ad aberrationes tabularum ternas dm, dk et dp indicandas, atque adeo ad tabulas corrigendas.

§. 33. Similis fere correctio adhiberi poteſt pro tabulis cuiuscunque planetae primarii, ſi eius loca heliocentrica obſeruare liceat. Si enim ad datum tempus obſeruata ſit longitudo planetae heliocentrica F vna cum latitudine heliocentrica G; ad idem tempus ex tabulis corrigendis ſupputetur longitudo heliocentrica f et latitudo pariter heliocentrica g, ponaturque $F - f = df$ et $G - g = dg$.

Exhibeant autem tabulae:		reuera autem eſſe
Diſtantiam planetae mediam a ſole	$= a$	$= a$
Excentricitatem	$= k$	$= k + dk$
Aphelii longitud. heliocentricam	$= p$	$= p + dp$
Nodi aſcendentis long. heliocentr.	$= q$	$= q + dq$
orbitae inclinationem	$= n$	$= n + dn$

anomaliam mediam vero tabularem ad quoduis tempus augeri debere angulo $= dm$.

Ad tempus autem obſeruationis ſit

Ex

	Ex tabulis non correctis	ex tabulis correctis
Anomalia media	$= x$	$= x + dx$
Anomalia excentri	$= v$	$= v + dv$
Diſtantia a ſole	$= y$	$= y + dy$
Anomalia vera	$= z$	$= z + dz$
Diſtantia aphelii a nodo	$= e$	$= e + de$
Longitudo planetae a nodo	$= r$	$= r + dr$
Longitudo heliocentrica planetae a prima ✱ ♈	$= f$	$= f + df$
Latitudo heliocentrica	$= g$	$= g + dg$

Erit autem vt ſupra vidimus:

$v = x - k\,\text{ſin.}\,(x - k\,\text{ſin.}\,(x - k\,\text{ſin.}\,(x - \text{etc.})$

$y = a(1 + k\,\text{coſ.}\,v)$

$\text{coſ.}\,z \frac{a}{y}(k + \text{coſ.}\,v)$ vel ſaepe commodius

$z = v - k\,\text{ſin.}\,v + \frac{1}{4}k^2\,\text{ſin.}\,2v - \frac{1}{12}k^3(\text{ſin.}\,3v + 3\,\text{ſin.}\,v) + \text{etc.}$

$\text{tang.}\,e = \frac{\text{tang}\,(p-q)}{\text{coſ.}\,n}$

$\text{tang.}\,r = \text{coſ.}\,n\;\text{tang.}\,(e + z)$

$f = q + r$

$\text{ſin.}\,g = \text{ſin.}\,n.\,\text{ſin,}\,(e + z)$

Valores autem differentiales, qui ex correctionibus oriuntur ita ſe habebunt

$dx = dm$

$dv = \frac{adm}{y} - \frac{adk\,\text{ſin.}\,v}{y}$

$dy = a\,dk\,\text{coſ.}\,z - \frac{aakdm\,\text{ſin.}\,v}{y}$

$dz = \frac{adm\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} - \frac{adk\,\text{ſin.}\,z}{y} - \frac{dk\,\text{ſin.}\,z}{1-kk}.$

$de = \frac{(dp-dq)(\text{coſ.}\,e)^2}{\text{coſ,}\,n\,(\text{coſ.}\,(p-q))^2} + \frac{dn\,\text{tang.}\,n\,\text{tang.}\,(p-q)(\text{coſ.}\,e)^2}{\text{coſ.}\,n}$

$dr = \frac{(de+dz)\,\text{coſ.}\,n\,(\text{coſ.}\,r)^2}{(\text{coſ.}\,(e+z))^2} - dn\,\text{ſin.}\,n\,\text{tang.}\,(e+z)(\text{coſ.}\,r)^2$

$df = dq + dr$

$dg = \frac{dn\,\text{coſ.}\,n\,\text{ſin.}\,(e+z)}{\text{coſ.}\,g} + \frac{(de+dz)\,\text{ſin.}\,n\,\text{coſ.}\,(e+z)}{\text{coſ.}\,g}.$

quae duae vltimae aequationes inſeruient ad tabulas corrigendas; ſi tres accipiantur obſeruationes; vt iam oſtendimus.

§. 34. Quodſi nunc haec praecepta ad vſum accommodare velimus, neceſſe eſt vt ante omnia primam illam ſtellam arietis determinemus, quoniam ab ea non ſolum planetarum longitudines computamus, ſed etiam aphelia eorum et nodos conſtantem diſtantiam ſeruare ponimus. Aſſumimus igitur initio anni 1701 longitudinem huius ſtellae ab aequinoctio fuiſſe 29°, 0′, 30″, quae ſiue vera ſit eius longitudo ſiue ſecus, non multum curamus; ab hoc enim eclipticae puncto, ſiue ſtella quaedam eo referatur ſiue ſecus, cum longitudines planetarum, tum apheliorum et nodorum ſitus deſcribemus. Praeterea aequinoctia quotannis 50″ regredi ponimus, ex quo ad praecipuas epochas ſequens tabella longitudinem iſtius noſtrae primae ſtellae arietis ab aequinoctio verno ſumtam indicabit.

Anno Chriſti	Longitudo primae ſtellae arietis ab aequinoctio verno			
1	0 S,	5°,	23′,	50″
1601	0 ,	27,	37,	10
1621	0 ,	27,	53,	50
1641	0 ,	28,	10,	30
1661	0 ,	28,	27,	10
1681	0 ,	28,	43,	50
1701	0 ,	29,	0,	30
1721	0 ,	29,	17,	10
1741	0 ,	29,	33,	50
1761	0 ,	29,	50,	30

1781	1	0,	7,	10
1801	1	0,	23,	50
1821	1	0,	40,	30
1841	1	0,	57,	10
1861	1	1,	13,	50
1881	1	1,	30,	30
1901	1	1,	47,	10
1921	1	2,	3,	50
1941	1	2,	20,	30
1961	1	2,	37,	10
1981	1	2,	53,	50

Quantum autem aequinoctia dato tempore recedant, cognoſcetur ex hac tabula

Anni	Praeceſſio aequin.		Anni	Praeceſſio aequin.			
1	0′,	50″	20	0 S,	0°,	16′,	40″
2	1,	40	40	0,	0,	33,	20
3	2,	30	60	0,	0,	50,	0
4	3,	20	80	0,	1,	6,	40
5	4,	10	100	0,	1,	23,	20
6	5,	0	200	0,	2,	46,	40
7	5,	50	300	0,	4,	10,	0
8	6,	40	400	0,	5,	33,	20
9	7,	30	500	0,	6,	56,	40
10	8,	20	600	0,	8,	20,	0
11	9,	10	700	0,	9,	43,	20
12	10,	0	800	0,	11,	6,	40
13	10,	50	900	0,	12,	30,	0
14	11,	40	1000	0,	13,	53,	20
15	12,	30	2000	0,	27,	46,	40

Anni	Praeceſſio aequin.		Anni	Praeceſſio aequin.
16	13′,	20″	3000	1 S, 11°, 40′ 0″
17	14,	10	4000	1 , 25 , 33 , 20
18	15,	0	5000	2 , 9 , 26 , 40
19	15,	50		
20	16,	40		

Ex hac igitur tabula ad quoduis tempus diſtantia aequinoctii verni ab hac prima ſtella arietis poterit aſſignari; id quod omnino neceſſe eſt, cum in obſeruationibus longitudines planetarum ab aequinoctio verno ſoleant exhiberi.

§. 35. His praemiſſis, quia ad theoriam motus planetarum ſingulorum emendandam ante omnia accurata tabula pro motu ſolis requiritur; methodum noſtram primum ad tabulas ſolares corrigendas accommodare iuuabit. Tabulae autem, quarum correctionem ſuſcipimus ad obſeruatorium Greenwicenſe et ſtilum veterem ſunt accommodatae, eaeque ponunt longitudinem aphelii orbitae terrae heliocentricam ab aſſumta prima ſtella arietis $=$ 8 S, 8°, 39′, 40″, atque excentricitatem orbitae terrae $= \frac{1700}{100000}$; diſtantiam terrae a ſole mediam $=$ 100000: vnde erit ex his tabulis $a = 100000$; $k = \frac{17}{1000}$ et $p =$ 248°, 39′, 40″.

Anomaliam autem mediam eaedem tabulae oſtendunt pro praecipuis epochis, vt ſequitur.

Initio anni	Anomalia media terrae	
1601	6 S, 13°, 41′, 40″	Hae anomaliae
1621	6 , 13 , 34 , 4	referendae ſunt ad
1641	6 , 13 , 26 , 28	meridiem diei poſtremi
1661	6 , 13 , 18 , 52	anni cuiusque praeteriti.

Initio

Initio anni	Anomalia media terrae
1681	6 , 13 , 11 , 16
1701	6 , 13 , 3 , 40
1721	6 , 12 , 56 , 4
1741	6 , 12 , 48 , 28
1761	6 , 12 , 40 , 52
1781	6 , 12 , 33 , 16
1801	6 , 12 , 25 , 41

Pro annis vero ſingulis Iulianis anomalia media augetur vt ſequens tabella indicat.

Anni Iuliani expanſi	Anomalia media Terrae
1	11 S, 29°, 44′, 50″
2	11 , 29 , 29 , 40
3	11 , 29 , 14 , 30
4	11 , 29 , 58 , 28
5	11 , 29 , 43 , 18
6	11 , 29 , 28 , 8
7	11 , 29 , 12 , 58
8	11 , 29 , 56 , 56
9	11 , 29 , 41 , 46
10	11 , 29 , 26 , 37
11	11 , 29 , 11 , 27
12	11 , 29 , 55 , 26
13	11 , 29 , 40 , 16
14	11 , 29 , 25 , 6
15	11 , 29 , 9 , 56
16	11 , 29 , 53 , 54
17	11 , 29 , 38 , 44
18	11 , 29 , 23 , 34
19	11 , 29 , 8 , 24
20	11 , 29 , 52 , 24

Multa-

Mutationes autem anomaliae mediae, quae ſingulis anni partibus reſpondent ex tabulis deſumere licet.

§. 36. Propoſita nobis primum ſit iſta obſeruatio Greenouici inſtituta, qua A. 1690 Martii die 7, 12^h, 8′, 24″, tempore medio longitudo ſolis ab aequinoctio obſeruata fuit.

11 S, 27°, 21′, 27″. Ob propagationem lucis autem haec longitudo obſeruata augeri debeat 20″, ita vt ſol, ſi lux in inſtanti propagaretur, eo tempore viſus fuiſſet in longitudine 11 S, 27°, 21′, 47″. Pro hoc nunc tempore quaeratur longitudo primae ſtellae arietis, ita

1681	0ˢ, 28°, 43′, 50″
9	7′, 30″
1690	0, 28°, 51′, 20″
Mart. 7	9
Subtrahatur	0, 28, 51, 29
ab	11, 27, 21, 47
	10, 28, 30, 18

quae eſt longitudo ſolis a prima ſtella arietis ſumta vnde longitudo terrae ex ſole viſa hoc tempore fuit F = 4 S, 28°, 30′, 18″. Quaeratur nunc pro hoc tempore anomalia terrae vel ſolis media, quod tempus aſtronomice expreſſum eſt 1690 Mart. 7 d. 0 h, 8′, 24″

Anni	Anomalia media terrae
1681	6S, 13°, 11′, 16″
9	11, 29, 41, 46
Mart. d. 7	2, 5, 3, 1
8′	20
24″	1
	8S, 17, 56, 24

§. 37.

§. 37. Ad computum ergo inſtituendum erit $x = 257°, 56', 24''$; et ſin. $x = -$ ſin. $77°, 56', 24''$. Sinus autem in arcum commutatur, ſi a logarithmo ſinus ſubtrahatur 4, 6855749, numerus enim reſiduo logarithmo reſpondens dabit arcum in minutis ſecundis expreſſum: at quia ſinus inſuper per $k = \frac{17}{1000}$ debent multiplicari inſuper ſubtrahi debet $l\frac{1000}{17} = 1, 7695510$; a logarithmo ſinus ad anomaliam excentri v inueniendam, omnino ſubtrahi debet iſte logarithmus 6, 4551259. Cum igitur ſit $v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc. calculus ita inſtitui debet.

l ſin. $x = 9,9902967$
ſubtrahatur $6,4551259$

$3,5351708$

numerus $3429''$ ſeu $57'\ 9'' = -k$ ſin. x
$257°, 56, 24 = x$ addatur

$258°, 53', 33'' = x - k$ ſin. x
180

$78°, 53', 33''$

l ſin. $9,9917737$
ſubtr. $6,4551259$

$3,5366478$

numerus $3441''$ ſeu $57', 21''$
$257°, 56', 24$ addatur x

$258°, 53', 45''$
$180°$

$78°, 53', 45''$

 l ſin.

l ſin. 9, 9917737
ſubtr. 6, 4551259

3, 5360478
numerus 3441″ ſeu 57′, 21″
257° 56′, 24

$v =$ 258°, 53′, 45″

§ 38. Hinc quaeratur diſtantia terrae a ſole $y = a + ka \text{ coſ. } v$. Eſt vero coſ. $v = -$ coſ. 78°, 53′, 45″ vnde
l coſ. 78°, 53′, 45″ = 9, 2846411
l a k = 3, 2304489

2, 5150900
ergo ka coſ. $v = -327$
addatur a = 100000

$y =$ 99672 et $ly = 4, 9985732$
Quoniam vero poſita anomalia vera $= z$ eſt coſ. $z = \frac{ak \text{ ſin. tot.}}{y} + \frac{a \text{ coſ. } v}{y}$, calculus ita ſe habebit:
l a k ſin. tot. = 13, 2304489
ly = 4, 9985732

8, 2318757
numerus ex tabula ſinuum 170559
l coſ *v* = 9, 2846411
l a = 5, 0000000

14, 2846411
ſubtr. *ly* = 4, 9985732

9, 2860679

numerus

numerus ex tabulis ſinuum 1932270 $= -\frac{a\ coſ.\ v}{y}$
ſubtr. 170559

— 1761711

At numerus 1761711 eſt ſinus anguli huius
$10^\circ, 8', 48''$ qui ſubtractus a tribus rectis
270°

dat $259^\circ, 51', 12''$ pro anomalia vera z. ergo
$z = 8\,S, 19^\circ, 51', 12''$ addatur
$p = 8\,, 8\,, 39\,, 40''$

$f = 4\,S.\ 28^\circ, 30', 52''$
haecque eſt longitudo terrae ex tabulis inuenta a prima ſtella arietis computata. Quare cum ſit
$F = 4\,S, 28^\circ, 30', 18''$ et
$f = 4\,S, 28^\circ, 30', 52''$ erit $F - f =$
$df = -34''$.

§. 39. Quoniam vero eſt $df = dp + \frac{adm\, ſin.\, z}{y\, ſin.\, v} - \frac{adk\, ſin.\, z}{y}$ $- \frac{dk\, ſi.\, z}{(1-kk)}$ haec aequatio ad noſtram obſeruationem ſequenti modo accommodabitur. Eſt ſin. $z =$ $-$ ſin. $79^\circ, 51', 12''$; ſin. $v = -$ ſin. $78^\circ, 53', 45''$ et
$l\frac{1}{1-kk} = l\frac{1000000}{983 \cdot 1017} = 0,0001254$. Hinc fiat
l ſin. $z = 9,9931539$ negatio vero poſtea in
l ſin. $v = 9,9917924$ computum duci debet.
$l\frac{a}{y} = 0,0014267$
vnde valor ipſius df ſequenti modo definietur
$l\ ſin.\ z = 9,9931539$
$l\frac{a}{y} = 0,0014267$

$$9\,,\ 9945806 = l\,\frac{-a\,\mathit{ſin}.z}{y}$$

$$l\,\mathit{ſin}.\ v = 9\,,\ 9917924$$

$$0\,,\ 0027882$$

numerus reſpondens $= 1\,,\ 0064 = \frac{a\,\mathit{ſin}.z}{y\,\mathit{ſin}.v}$

$$l\,\frac{-a\,\mathit{ſin}.z}{y} = 9\,,\ 9945806$$

$$l\,\mathit{ſin}.\ tot. = 10\,,\ 0000000$$

$$(-1),9945806$$

numerus reſpondens $= 0\,,\ 9876 = \frac{-a\,\mathit{ſin}.\ z}{y\,\mathit{ſin}.tot.}$

$$l\,\mathit{ſin}.\ z = 9\,,\ 9931539$$

$$l\,\frac{1}{1-kk} = 0\,,\ 0001254$$

$$9\,,\ 9932793$$

$$l\,\mathit{ſin}.\ tot. = 10\,,\ 0000000$$

$$(-1),9932793$$

numerus reſpondens $= 0\,,\ 9846 = \frac{-\mathit{ſin}.z}{1-kk}$

Ex his erit $df = -34'' = dp + 1\,,\ 0064\,dm + 1\,,\ 9722\,dk.\ (406795''.\,dk)$

§. 40. Sumamus aliam obſeruationem ſolis etiam Grenouici factam Anno 1690, M. Sept. d. 15, 11 *h*, 51′, 27″ tempore medio, ſeu aſtronomico more Anno 1690, d. 14. Sept. 23 *h*, 51′, 27″, quo tempore ſolis longitudo ab aequinoctio verno obſeruata fuit 6 S, 2°, 45′, 37″, quae ob lucis propagationem 20″ aucta fit 6 S, 2°, 45′, 57″. Ad hoc tempus longitudo primae ſtellae arietis quaeratur

	Longitudo primae ſtellae Arietis
A. 1690	0 S, 28°, 51′, 20″
14 Sept.	35

ſubtra-

ſubtrahatur	0 S, 28°, 51′, 55″
ab	6 S, 2°, 45′, 57″
	5 S, 3°, 54′, 2″

quae eſt longitudo ſolis a prima ſtella arietis ſumta vnde longitudo terrae ex ſole viſa erat F = 11 S, 3°, 54′, 2″. Quaeratur nunc pro hoc tempore anomalia media ſolis vel terrae:

	Anomalia Terrae media
A. 1690	6 S, 12°, 53′, 2″
d. 14. Sept.	8 S, 13, 18, 6
23 *h.*	56, 40
51′	2, 6
27″	1
	2 S, 27°, 9′, 55″

vnde erit anomalia media $x = 87°, 9', 55''$

§. 41. Ad anomaliam excentri inueniendam iterum a logarithmis ſinuum ſubtrahi debet iſte logarithmus 6, 4551259, eritque calculus vt ſequitur.

l *ſin.* $x = 9, 9994683$
ſubtr. 6, 4551259

3, 5443424

numerus 3502″ = 58′, 22″ = k *ſin.* x ſubtrahatur
87°, 9′, 55″ ab x

86°, 11′, 33″ = $x - k$ *ſin.* x

l *ſin.* = 9, 9990402
6, 4551259

3, 5439143

numerus $= 3499'' = 58', 19''$ ſubtrahatur
ab $87^\circ, 9', 55''$

$86^\circ, 11', 36''$

l ſin. $= 9, 9990405$
$6, 4551259$

$3, 5439146$

numerus $= 3499'' = 58', 19''$
ab $x = 87^\circ, 9', 55''$

$v = 86^\circ, 11', 36''$

Cum nunc ſit diſtantia Terrae *a* ſole $y = a + k\,a$ *coſ.* v fiat *l coſ.* $86^\circ, 11', 36'' = 8, 8221016$
$l\,a\,k = 3, 2304489$

$12, 0525505$

ergo $k\,a$ *coſ.* $v = 113$
addatur $a = 100000$

$y = 100113$ et $l y = 5, 0004905$

Quoniam porro ad anomaliam veram z inueniendam eſt *coſ.* $z = \frac{ak\,ſin.\,tob}{y} + \frac{a\cos. v}{y}$ fiat
l ak ſin.tot. $= 13, 2304489$
$l y = 5, 0004905$

$8, 2299584$

numerus ex tabula ſinuum 169808
l coſ. $v = 8, 8221016$
$l a = 5, 0000000$

$13, 8221016$
$l y = 5, 0004905$

$8, 8216111$

numerus ex tabula ſinuum $= 663149$
169808

$\cos z = 832957$

ergo $z = 85°, 13', 20''$
ſeu anomalia vera $z = 2\,S, 25°, 13', 20''$
addatur $p = 8, \quad 8, 39, 40$

long. terrae $f = 11\,S, \quad 3°, 53', \quad 0''$
at eſt $F = 11\,S, \quad 3, 54, \quad 2$

ergo $F - f = df = 62''$.

§. 42. Quoniam vero eſt $df = dp + \frac{a\,dm\,\sin. z}{y\,\sin. v} - \frac{a\,dk\,\sin. z}{y} - \frac{dk\,\sin. z}{1 - kk}$, atque df, dp et dm arcus denotant in ſecundis exprimendos, dk vero ſit numerus abſolutus, eius coefficientes in arcus transformari atque in minutis ſecundis exprimi debent, quod fit ſi a logarithmis ſinuum ſubtrahatur 4, 6855749; reſiduorum enim logarithmorum numeri reſpondentes dabunt arcus in minutis ſecundis expreſſos; quam reductionem etiam in prima obſeruatione adhibuimus.

$l\,\sin. z = 9,9984883$
$l\;a = 5,0000000$

$l\,a\,\sin. z = 14,9984883$

$l\,\sin. v = 9,9990408$
$l\,y = 5,0004905$

$14,9995313$

$l\,\frac{a\,\sin. z}{y\,\sin. v} = (-1)\,9989570$

ergo $\frac{a\,\sin. z}{y\,\sin. v} = 0,9976$

a

$$
\begin{array}{rl}
l\,a\,\text{ſin.}\,z = & 14,9984883 \\
l y = & 5,0004905 \\
\hline
 & 9,9979978 \\
 & 4,6855749 \\
\hline
 & 5,3124229
\end{array}
$$

ergo $\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} = 205316''$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Porro } l\,\text{ſin.}\,z = & 9,9984883 \\
l\frac{1}{1-kk} = & 0,0001254 \\
\hline
 & 9,9986137 \\
 & 4,6855749 \\
\hline
 & 5,3130388
\end{array}
$$

ergo $\frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk} = 205607''$

205316

$\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} + \frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk} = 410923''$

Ergo $df = 62'' = dp + 0,9976.\,dm - 410923''.\,dk$

§. 43. Pro tertia obſeruatione aſſumamus talem, quae cum alio loco, tum tempore aliquantum remoto ſit facta. Pariſiis nimirum A. 1716 Maii d. 12., $11^h\,55', 53''$, tempore medio ſtili noui locus ſolis ab aequinoctio diſtare deprehenſus eſt 1 S, 21°, 44′, 35″, quae longitudo ob lucis propagationem 20″ aucta ſit 1 S 21°, 44′, 55″. Tempus autem obſeruationis ad ſtilum veterem reductum eſt A. 1716 Maii d. 1, 11^h, 55′, 53″. Deinde quia Lutetia Pariſiorum 9′ temp. orientalior eſt quam Londinum, hoc tempus Londini erat A. 1716 Maii d. 1, 11^h, 46′, 53″ tempore ciuili, quod ſecundum tempus Aſtronomi-

nomicum dat A. 1716 Apr. 30 d. 23^h, $46'$, $53''$; at quia hic annus eſt biſſextilis, dies adiici debet ita vt habeatur A. 1716 Maii 1 d. 23^h, $46'$, $53''$. Ad hoc igitur tempus primum longitudo primae ſtellae arietis ſupputetur,

Longitudo primae ſtellae arietis

A. 1701	0 S, 29°, 0′, 30″
— — 15	12′, 30″
Mai. 1 d.	17″
ſubtrahatur ab	0 S, 29°, 13′, 17″
	1 S, 21°, 44′, 55″
	0 S, 22°, 31′, 38″

quae eſt longitudo ſolis a prima ſtella arietis; vnde longitudo terrae ex ſole viſa ab eadem prima ſtella arietis erit $F = 6$ S, 22°, 31′, 38″.

§. 44. Quaeratur nunc ad hoc tempus ſolis vel terrae anomalia media ex tabulis aſſumtis.

Anomalia media terrae

A. 1701	6S, 13°, 3′, 40″
Anni. 15	11, 29, 9, 56
Mai. 1 d.	3, 29, 15, 31
23 h.	56, 40
46′	1, 53
53″	 2
	10S, 12°, 27′, 42″

Erit ergo $x = 312°, 27', 42''$ et ſin. $x = -$ ſin. $47°, 32', 18''$

quare calculus ad anomaliam excentri v inueniendam inſtituetur vt ſupra §. 37;

l-ſin. $x = 9, 8678950$
ſubtr. $6, 4551259$

$3, 4127691$

numerus $2587'' = 43', 7'' = -k$ ſin. x

$x = 312°, 27', 42''$ addatur

$313°, 10, 49''$ a
$360°$ ſubtr.

$46°, 49', 11''$

l ſin. $= 9, 8628490$
$6, 4551259$

$3, 4077231$

numerus $2557'', 42', 37''$
$x = 312°, 27', 42''$

$313°, 10', 19''$
360

$46°, 49', 41''$

l ſin. $= 9, 8629065$
$6, 4551259$

$3, 4077806$

numerus; $2557'' = 42', 37''$
$x = 312°, 27', 42''$

$v = 313°, 10', 19''$

§. 45. Diſtantia Solis a terra $y = a + ka$ coſ. v ita reperietur coſ. $v =$ coſ. $46°, 49', 41'' =$ ſin. $43°, 10', 19''$

l coſ.

$l\,\text{coſ.}\,v = 9,\ 8351791$
$l\,a\,k = 3,\ 2304489$

$l\,k\,a\,\text{coſ.}\,v = 3,\ 0656280$
ergo $k\,a\,\text{coſ.}\,v = 1163$
$a = 100000$

$y = 101163$ et $l\,y = 5,\ 0050216$

Porro eſt coſinus anomaliae verae $z = \frac{ak\,\text{ſin. tot.}}{y} + \frac{a\,\text{coſ.}\,v}{y}$

$l\,a\,k$ ſin. tot. $= 13,\ 2304489$
$l\,y = 5,\ 0050216$

$8,\ 2254273$

numerus ex tabulis ſinuum $= 168046$

$l\,a\,\text{coſ.}\,v = 14,\ 8351791$
$l\,y = 5,\ 0050216$

$9,\ 8301575$

numerus ex tabulis ſinuum $= 6763284$
168046

coſ. $z = 6931330$

qui eſt ſin. $43^\circ,\ 52',\ 43''$ addantur tres recti
270°

$z = 313^\circ,\ 52',\ 43''$ ſeu
$z = 10S,\ 13^\circ,\ 52',\ 43''$
$p = 8,\ 8,\ 39',\ 40$

$f = 6S,\ 22^\circ,\ 32',\ 23''$
$F = 6S,\ 22^\circ,\ 31',\ 38''$

$F - f = df = -45''$

§. 46. Cum nunc ſit $df = dp + \frac{a\,dm\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} - dk$ $\left(\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} + \frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk}\right)$ inſtituatur ſequens calculus; exiſtente ſin. $z = -$ ſin. $46^\circ, 7', 17''$ et ſin. $v = -$ ſin $46^\circ, 49', 41''$.

$$l - \text{ſin.}\,z = 9,\ 8578207$$
$$l\,\frac{y}{a} = 0,\ 0050216$$
$$9,\ 8527991$$
$$l - \text{ſin.}\,v = 9,\ 8629065$$
$$(-1),\ 9898926$$
$$\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} = 0,\ 97700$$
$$l - \text{ſin.}\,z = 9,\ 8578207$$
$$l\,\frac{y}{a} = 0,\ 0050216$$
$$9,\ 8527991$$
$$4,\ 6855749$$
$$5,\ 1672242$$
$$-\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} = 146969''$$
$$l\text{-ſin.}\,z = 9,\ 8578207$$
$$l\,\frac{1}{1-kk} = 0,\ 0001254$$
$$9,\ 8579461$$
$$4,\ 6855749$$
$$5,\ 1723712$$
$$-\frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk} = 148721''$$
$$146969$$
$$295690'' = -\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} - \frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk}.$$

Quare erit $df = -45'' = dp + 0,97700\,dm + 295690''.\,dk$

§. 47.

§. 47. Ex his tribus aequationibus nacti ſumus ad tabulas ſolares aſſumtas corrigendas tres ſequentes aequationes.

$$\text{I.}\quad -34'' = dp + 1{,}0064\,dm + 406795''.dk$$
$$\text{II.}\quad 62'' = dp + 0{,}9976\,dm - 410923''.dk$$
$$\text{III.}\quad -45'' = dp + 0{,}9770\,dm + 295690''.dk$$

quae praebent eliminato dp has duas

$$-96'' = 0{,}0088\,dm + 817718''.dk \mid \text{per. } 10$$
$$+11'' = 0{,}0294\,dm + 111105''.dk \mid \text{per. } 3.$$

hincque $-993'' = 7843865''.dk$ ex quo reperitur $dk = \frac{-993}{7843865} = \frac{-126}{1000000}$. Cum igitur excentricitas k poſita eſſet $= \frac{17}{1000} = \frac{17000}{1000000}$ erit excentricitas vera $k + dk = \frac{16874}{1000000}$. Porro quia eſt $dk = \frac{-126}{1000000}$ erit $11'' = 0{,}0294\,dm - 14''$. ſeu $dm = \frac{2500000''}{294} = 14', 10'' = 850''$. Ex quo anomaliae mediae tabularum ad quoduis tempus augeri debent angulo 14′, 10″. His autem valoribus loco dk et dm ſubſtitutis inuenitur $dp = -838'' = -13', 58''$. Quare cum aphelii orbitae terrae longitudo a prima ſtella arietis in tabulis ſit poſita $p = 8$ S, 8°, 39′, 40″ erit vera aphelii longitudo $p + dp = 8$ S, 8°, 25′, 42″. Cum ergo longitudo primae ſtellae arietis ab aequinoctio verno Anni 1701 initio eſſet 0 S, 29°, 0′, 30″, fuit hoc tempore aphelii terrae ab aequinoctio verno longitudo = 9 S, 7°, 26′, 12″, hinc apogaei ſolis eo tempore longitudo ab aequinoctio = 3 S, 7°, 26′, 12″. Haeque correctiones ſatis propre conueniunt cum iis, quas in Tomo VII. Comment. altera methodo vſus exhibui. Tabulae autem ſolares hoc modo correctae non ad quoduis tempus ſolis locum oſtendunt, in quo reuera conſpicietur,

 ſed,

ſed in quo conſpicuus foret, ſi lumen in inſtanti ad nos pertingeret: quamobrem a loco ſolis ex his tabulis correctis eruto perpetuo ſubtrahi oportet 20″, vt locus apparens obtineatur.

§. 48. En igitur tabulas ſolares, quibus terra in orbita ſua circa ſolem mouetur, maxime exactas, ſi quidem obſeruationes, quibus ſum vſus, ſint ſumma cura inſtitutae. Eſt igitur, a prima noſtra ſtella arietis longitudines computando, aphelii terrae longitudo conſtans = 8 S, 8°, 25′, 42″. Deinde orbitae terrae excentricitas ſeu diſtantia ſolis a centro ellipſis terrenae $= \frac{16873}{1000000}$, ita vt ſit diſtantia terrae a ſole media ad ſolis a centro orbitae diſtantiam vt 1000000 ad 16873. Hinc inuenitur per regulam Tomo VII. Comment. p. 98 datam maxima aequatio hoc modo

$$5,6154596$$
$$l\ 16873 = 4,2271923$$
$$\overline{3,8426519} \text{ demto } l\ 1000000$$

Ergo aequatio maxima eſt $6961'' = 1°, 56', 1''$

Tabulae autem anomaliarum mediarum ad praecipuas epochas ſequentes, vbi ſemper eae reſpondent meridiei poſtremi diei anni eum, quem tabulae monſtrant, praecedentis, pro obſeruatorio Londinenſi ſeu potius Grenouicenſi ita ſe habebunt

A. C.	Anomalia terrae media			
1601	6 S,	13°,	55′,	50″
1621	6,	13,	48,	14
1641	6,	13,	40,	38
1661	6,	13,	33,	2

A.

A. C.	Anomalia terrae media			
1681	6 S,	13°,	25′,	26″
1701	6,	13,	17,	50
1721	6,	13,	10,	14
1741	6,	13,	2,	38
1761	6,	12,	55,	2
1781	6,	12,	47,	26
1801	6,	12,	39,	51

Tabula vero pro mutatione anomaliae pro dato annorum numero, et pro datis anni partibus manet vt ante, cum ea, quia tempore periodico terrae in orbita ſua nititur, correctione non egeat. Ex his igitur tabulis correctis ad quoduis tempus locum ſolis in ecliptica exactiſſime aſſignare licebit, qui tutiſſime in inueſtigandis reliquorum planetarum locis adhiberi poterit.

§. 49. Orbita terrae nunc ſtabilita pergo ad vſum huius methodi monſtrandum in orbita cuiuscunque planetae per loca Geocentrica determinanda. Eligo autem ad hoc ex planetis Mercurium potiſſimum, cum quod eius loca heliocentrica rariſſime obſeruare licet, tum quod tabulae aſtronomicae pro hoc planeta maxime differunt, ideoque correctione prae ceteris indigent. Tabulas autem hic eas corrigendas ſuſcipio, quae lexico Technico Harriſii ſunt inſertae, atque ad obſeruatorium Londinenſe accommodatae. Statuitur autem in his tabulis

Diſtantia mercurii media a ſole $a = 38710$

exiſtente terrae diſtantia media $= 100000$

Diſtantia ſolis a centro orbitae Mercurii $= 7970$

Vnde excentricitas $k = \frac{797}{3871} = \frac{205589}{1000000}$

atque

atque a prima ſtella arietis ſtatuitur

Longitudo aphelii $p = 7 S, 13°, 48'$

Longitudo nodi aſc. $q = 0 S, 15°, 42'$

Inclinatio orbitae ad eclipticam $n = 6°, 54'$

Anomaliae mediae autem ad quoduis tempus in iis tabulis exhibentur, quas huc transſcribere non eſt opus, cum vero fuerint correctae, eas hic indicabo. Pono autem ad quoduis tempus anomaliam mediam, quam hae tabulae monſtrant, augeri debere angulo dm; excentricitatem k vero fractione dk, longitudinem aphelii p arculo dp, longitudinem nodi q arculo dq atque inclinationem orbitae n angulo dn augendam eſſe; quas correctiones quinque ex tribus ſequentibus obſeruationibus deducam.

§. 50. Tres iſtae obſeruationes, quibus in hoc negotio vti viſum eſt, inſtitutae ſunt Pariſiis, atque tam longitudo quam latitudo mercurii geocentrica ad tempora terna notata obſeruata eſt vt ſequitur.

Tempore apparente ſtili noui	Longitudo ☿	Latitudo
A. 1715 Mai. 20 d. $22^h 39'$	1S, 8°, 36′, 0″	2°, 23′, 55″ Auſtr.
A. 1716 Aug. 18 d. $22^h 51'$	4S, 8°, 56′, 30″	0°, 13′, 30″ Bor.
A. 1717 Mai. 6 d. $23^h 48'$	1S, 13°, 42′, 20″	0°, 18′, 30″ Auſtr.

Tempora autem haec triplici correctione opus habent, primum ſcilicet a ſtilo nouo ad veterem debent reduci, deinde ad meridianum Londinenſem transferri; ac tertio, quia ſunt tempora apparentia, in media transformari debent. Hoc facto tempore medio Londinenſi obſeruationes ita ſe habebunt

A. 1715

	Longitudo ☿	Latitudo
A. 1715 Mai. 9d. 22h 25′ 55″	1S, 8°, 36′, 0″	2°, 23′, 55″ Auſtr.
A. 1716 Aug. 7d. 22h 45′ 6″	4S, 8°, 56′, 30″	0°, 13′, 30 Bor.
A. 1717 Apr. 25d. 23h 35′, 7″	1S, 13°, 42′, 20″	0°, 18′, 30 Auſtr.

Longitudines mercurii autem hae ab aequinoctio verno ſunt computatae, quae ideo ad primam ſtellam arietis ſunt reducendae: facta autem hac reductione obſeruationes ita ſe habebunt.

Tempus medium	Long. ☿ a 1 * ♈	Latitudo
A. 1715 Mai. 9 d. 22 h. 25′, 55″	0 S, 9°, 23′, 32″	2°, 23′, 55″ Auſtr.
A. 1716 Aug. 7 d. 22 h. 45′, 6″	3 S, 9°, 43′, 0″	0°, 13′, 30″ Bor.
A. 1717. Apr. 25 d. 23 h. 35′, 7″	0 S, 14°, 28′, 14″	0°, 18′, 30″ Auſtr.

Hae longitudines obſeruatae porro correctione opus habent ex lucis propagatione orta, ad quam inueniendam oportet, vt ad ſingula obſeruationum tempora loca terrae in orbita ſua ſupputemus; quae loca vna cum diſtantiis terrae a ſole his temporibus neceſſaria ſunt, ad loca mercurii geocentrica ex tabulis computanda.

§. 51. Ad tempus igitur primae obſeruationis locus terrae in ſua orbita, ſeu eius longitudo heliocentrica a prima ſtella arietis ſequenti calculo ex tabulis noſtris correctis eruetur.

Anno	Anomalia media terrae
1701	6S, 13°, 17′, 50″
14 A.	11, 29, 25, 6
Mai. 9 d.	4, 7, 8, 36
22 h.	54, 13
25′, 55″	1, 4
	10S, 20°, 46′, 59″

 Calculus

Calculus ergo inſtituatur vt ſupra: eritque anomalia media terrae $x = 320^\circ, 46', 59''$. ex qua anomalia excentri inuenietur $v = x - k$ ſin. ($x - k$ ſin. ($x - k$ ſin. (x etc. at eſt $lk = (-2), 2271923$ et $l\frac{1}{k} = 1, 7728076$. ex quo a logarithmis ſinuum, vt ii in arcus conuertantur ſubtrahi debet $1, 7728076$

$+ 4, 6855749$

hic logarithmus. $6, 4583825$

Atqui eſt ſin. $x = -$ ſin. $39^\circ, 13', 1''$

$l -$ ſin. $x = 9, 8008947$

ſubtr. $6, 4583825$

$3, 3425122$

numerus. $2201'' = 36', 41'' = - k$ ſin. x

$x = 320^\circ, 46', 59''$ addatur

$321^\circ, 23', 40''$ ſubtr.

ab 360

$38^\circ, 36', 20''$

l ſin. $= 9, 7951536$

$6, 4583825$

$3, 3367711$

numerus $2171'' = 36', 11''$ addatur ad

$x = 320^\circ, 46', 59''$

$v = 321^\circ, 23', 10''$ anomalia excentri.

Hinc reperitur diſtantia terrae a ſole $y = a + ka$ coſ. v exiſtente $a = 100000$ et coſ. $v =$ ſin. $51^\circ 23', 10''$.

lka

$lka \; = 3,2271923$
$l\,\text{coſ.}\,v = 9,8928563$

$3,1200486$

numerus = 1318
Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 101318$
et $ly = 5,0056867$.
Anomalia vera z commodiſſime reperietur ex hac aequatione $z = v - k\,\text{ſin.}\,v + \frac{1}{4}k^2\,\text{ſin.}\,2v$. vbi eſt
$\text{ſin.}\,v = -\,\text{ſin.}\,38^\circ, 36', 50''$
$\text{ſin.}\,2v = -\,\text{ſin.}\,57^\circ, 13', 40''$
$l\frac{1}{4}k = -\,2,3748676$.
Calculus ergo ita inſtituetur:
$l-\text{ſin.}\,v = 9,7952327$
$6,4583825$

$3,3368502$

$-k\,\text{ſin.}\,v = 2172'' = 36', 12''$
$l-\text{ſin.}\,2v = 9,9246535$
$6,4583825$

$3,4662710$
$l\frac{1}{4}k = -\,2,3748676$

$1,0914034$

$-\frac{1}{4}k^2\,\text{ſin.}\,2v = 12''$.
Ergo $z = v + 36', = 321^\circ, 59', 10''$
ſeu z = 10S, 21°, 59′, 10″
addatur p = 8S, 8°, 25′, 42″

longit. terrae = 7S, 0°, 24′, 52″
a prima ſtella arietis computata.

§ 52. Inſtituatur ſimili modo inueſtigatio longitudinis terrae tempore ſecundae obſeruationis, qui annus cum ſit biſſextilis pro Aug. d. 7 ſumi debet d. 8.

Anno	Anomalia media
1701	6 S., 13°, 17′, 50″
15	11, 29, 9, 56
Aug. 8 d.	7, 6, 50, 2
22 h	54, 13
45′, 6″	1, 51
	1 S, 20°, 13′, 52″

Ergo anomalia media terrae $x = 50°, 13', 52''$

l ſin. $x = 9, 8857300$
$6, 4583825$
$3, 4273475$

k ſin. $x = 2675'' = 44', 35''$ ſubtrahatur
ab $x = 50°, 13', 52''$
$49°, 29', 17''$

l ſin. $= 9, 8809376$
$6, 4583825$
$3, 4225551$

numerus $= 2646'' = 44', 6''$ ſubtrahatur
ab $x = 50°, 13', 52''$

$v = 49°, 29', 46''$

l coſ. $v = 9, 8125789$
$lka = 3, 2271923$
$3, 0397712$

numerus $= 1096$

Ergo

Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 101096$

atque $ly = 5, 0047340$

Nunc l ſin $v = 9, 8810206$

$6, 4583825$

$3, 4226381$

k ſin. $v = 2646'' = 44', 6''$

$2v = 98°, 59', 32''$

ſin. $2v =$ coſ. $8°, 59', 32''$

l ſin. $2v = 9, 9946400$

$6, 4583825$

$3, 5362575$

$l\frac{1}{4}k = -2, 3748676$

$1, 1613899$

$\frac{1}{4}k^2$ *ſin.* $2v = 14''$

Ergo $z = v - 43', 52'' = 48°, 45', 54''$

Ergo anomalia terrae vera $=$ 1 S, 18°, 45′, 54″

longitudo aphelii $p =$ 8, 8, 25, 42

longitudo terrae a 1 * ♈ = 9 S, 27°, 11′, 36″

§. 53. Peruenimus tandem ad tertiam obſeruationem, ad quam locus terrae ſequenti modo reperietur.

Anno	Anomalia media terrae
1701	6 S, 13°, 17′, 50″
16 A.	11, 29, 53, 54
Apr. 25. d.	3, 23, 20, 42
23 h.	56, 40
35′, 7″	1, 27
	10 S, 7°, 30′, 33″

Ergo

Ergo anomalia media $x = 307°, 30', 33''$
et ſin. $x = -$ ſin. $52°, 29', 27''$

$$
\begin{array}{rl}
l - \text{ſin. } x = & 9,\ 8993697 \\
& 6,\ 4583825 \\
\hline
& 3,\ 4409872 \\
-k \text{ ſin. } x = & 2760'' = 46',\ 0'' \\
x = & 307°,\ 30',\ 33'' \\
\hline
& 308°,\ 16',\ 33'' \text{ ab} \\
& 360 \\
\hline
& 51°,\ 43',\ 27''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
l \text{ ſin.} = & 9,\ 8948900 \\
& 6,\ 4583825 \\
\hline
& 3,\ 4365075 \\
\text{numerus} = & 2732'' = 45',\ 32'' \\
x = & 307°,\ 30',\ 23'' \\
\hline
v = & 308°,\ 16',\ 5''
\end{array}
$$

cof. $v =$ ſin. $38°, 16', 5''$

$$
\begin{array}{rl}
l \text{ coſ } v = & 9,\ 7919200 \\
l k a = & 3,\ 2271923 \\
\hline
& 3,\ 0191123
\end{array}
$$

$k a$ coſ. $v = 1045$
Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 101045$
et $l y = 5,\ 0045148$
Porro eſt $-k$ ſin. $v = 45', 32''$
atque ſin. $2v = -$ ſin. $76°, 32', 10''$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Ergo } l - \text{ſin. } 2v = & 9,\ 9878921 \\
& 6,\ 4583825 \\
\hline
\end{array}
$$

$$3,\ 5295096$$
$$l\tfrac{1}{4}k = -2,\ 3748676$$
$$1,\ 1546420$$

$-\tfrac{1}{4}k^2\ ſin.\ 2v = 14''$

hincque $z = v + 45' + 18'' = 309°, 1', 23''$

ſeu anomalia vera z = 10 S, 9°, 1', 23''

addatur longitudo aph. p = 8 S, 8°, 25', 42''

Longitudo terrae = 6 S, 17°, 27', 5''

§ 54. Inuentis terrae locis heliocentricis ad ſingularum obſeruationum momenta, poterimus loca mercurii obſeruata per luminis propagationem corrigere ſecundum regulam §. 30. datam. Erat autem pro obſeruatione prima

longitudo ☿ obſeruata 0 S, 9°, 23', 32''

longitudo terrae 7 S, 0°, 24', 52'' ſubtr.

5 S, 8°, 58', 40''

qui arcus eſt 158°, 58', 40'' vnde erit

μ = ſin. 21°, 1', 20''

m = − ſin. 68°, 58', 40''

$l\mu = 9,\ 5546581$

$l\ a = 6,\ 0000000$

$15,\ 5546581$

$l\ b = 5,\ 5878232$

$l\ \frac{\mu a}{b} = 9,\ 9668349$

angulus cuius ſinus eſt $\frac{\mu a}{b}$ eſt 67°, 54'

$q =$

$q = cof.\ 67^\circ . 54'$ et $l q = 9, 5754468$

$l \frac{c}{s} = 3, 8140656$

$l \frac{sq}{c} = 5, 7613812$

ſubtr. $4, 6855749$

$1, 0758063$

Ergo $\frac{s}{c} q = 12''$

Porro eſt $l - m = 9, 9700900$

$l \frac{c}{r} = 4, 0201540$

$5, 9499360$

$4, 6855749$

$1, 2643611$

Ergo $- \frac{rm}{c} = 18''$

Ad longitudinem mercurii obſeruatam ob propagationem lucis addi debent $12'' + 18''$ ſeu $30''$, ita vt vera mercurii longitudo in prima obſeruatione ſit

$0\ S, 9^\circ, 24', 2''$.

§. 55. Simili modo pro obſeruatione ſecunda correctio ex propagatione lucis orta inueſtigetur.

Longitudo mercurii obſeruata $3\ S, 9^\circ, 43', 0''$.

Longitudo terrae helioc. $9\ S, 27^\circ, 11', 36''$

$5\ S, 12^\circ, 31', 24''$

qui arcus eſt $162^\circ, 31', 24''$

vnde erit $\mu = ſin.\ 17^\circ, 28', 36''$

$m = - ſin.\ 72^\circ, 31', 24''$

$l\, a\, \mu = 15, 4775000$

$l\, b = 5, 5878232$

$9, 8896768$

angulus

angulus cuius ſinus eſt $\frac{au}{b}$ eſt 50°, 52′

$q = cof. 50°, 52′, = ſin. 39°, 8′$

$lq = 9, 8001169$

$l\frac{c}{s} = 3, 8140656$

5, 9860513

4, 6855749

1, 3004764

Ergo $\frac{s}{c} q = 20''$

Porro $l - m = 9, 9794593$

$l\frac{c}{r} = 4, 0201540$

5, 9593053

4, 6855749

1, 2737304

Ergo $- \frac{r}{c} m = 18'' \frac{3}{4}$

Ad longitudinem mercurii obſeruatam addi debent 38″ ita vt vera longitudo mercurii tempore ſecundae obſeruationis a prima ſtella arietis ſit

3 S, 9°, 43′, 38″.

§. 56. Pro tertia denique obſeruatione correctio ad longitudinem mercurii obſeruatam addenda ſequenti modo inuenietur.

Longitudo mercurii obſeruata.	0 S, 14°, 28′, 14″
Longitudo terrae a 1 * ♈ =	6 S, 17°, 27′, 5″
	5 S, 27°, 1′, 9″

Qui arcus eſt 177°, 1′, 9″

vnde μ = ſin. 2°, 58′ 51″

et $m = -$ ſin. 87°, 1′, 9″

$$la\mu = 14,7163829$$
$$lb = 5,5878232$$
$$9,1285597$$

angulus cuius ſinus $\frac{a\mu}{b}$ eſt, $7^\circ, 44'$

$$q = \text{coſ. } 7^\circ, 44', = \text{ſin. } 82^\circ, 16'$$
$$lq = 9,9960321$$
$$l\frac{c}{s} = 3,8140656$$
$$6,1819665$$
$$4,6855749$$
$$1,4963916$$

Ergo $\frac{s}{c}q = 31\frac{1}{3}''$

Porro eſt $l - m = 9,9994110$

$$l\frac{c}{r} = 4,0201540$$
$$5,9792570$$
$$4,6855749$$
$$1,2936821$$

Ergo $-\frac{r}{c}m = 19\frac{2}{3}''$

Ad longitudinem mercurii obſeruatam addi debent $51''$ ita vt tertia obſeruatione longitudo mercurii fuerit

$$0S, 14^\circ, 29', 5''$$

Haec ita ſe habent, quando mercurius a terra longius diſtat quam ſol: quodſi autem mercurius terrae propior eſſet quam ſol, tum aequatio non erit, vt hic poſuimus $-\frac{r}{c}m + \frac{s}{c}q$ ſed erit $-\frac{r}{c}m - \frac{s}{c}q$. Hoc autem apparebit, ſi cum mercurii locus heliocentricus fuerit inuentus, diſtantia mercurii et terrae heliocentrica minor fuerit quam 90 graduum.

duum. Cum igitur partes aequationis inuenerimus, poſt modum apparebit, vtrum eae partes addi, an a ſe inuicem ſubtrahi debeant; quare plenam correctionem ex propagatione luminis ortam eo vsque differemus, quoad longitudo mercurii heliocentrica fuerit determinata.

§. 57. His praepatatis primam mercurii obſeruationem conſideremus, atque ad hoc tempus ex tabulis locum mercurii ſupputemus. Erat igitur

Tempore medio A. 1715 Mai. 9 d. 22 h, 25′, 55″

Longitudo ☿ obſeruata a 1 * ♈ = 0 S, 9°, 23, 32″

quae longitudo, ſi diſtantia mercurii et terrae heliocentrica maior ſit 90°, augeri debet 18″ + 12″. E contrario autem, ſi haec diſtantia heliocentrica minor fuerit 90°, augeri debet 18″ − 12″

Latitudo ☿ obſeruata eſt 2°, 23′, 55″ Auſtralis.

Hoc porro tempore inuenta eſt

Longitudo terrae a 1 * ♈ = 7 S, 0°, 24′, 52″.

Diſtantia terrae a ſole = 101318

Log. diſtantiae terrae a ſole = 5, 0056867.

Deinde ex tabulis mercurii eſt

Diſtantia mercurii a ſole media a = 38710

Log. huius diſtantiae ſeu $l\,a$ = 4, 5878232

Excentricitas orbitae mercurii $k = \frac{205889}{1000000}$

hincque $l\,k$ = (−1), 3136332

Longitudo Aphelii ☿ a 1 * ♈ p = 7 S, 13°, 48′

Longitudo Nodi aſc. q = 0 S, 15°, 42′

Inclinatio orbitae ad Eclipt. n = 6°, 54′.

Iam ex tabulis ad tempus obſeruationis ſupputetur anomalia media.

A. 1701	8 S, 4°, 2′, 0″
Anni 14	1, 14, 6′, 14
Mai.	4, 11, 4, 48
9 d.	1, 6, 49, 52
22 h.	3, 45, 5
25′, 55″	4, 25
	3 S, 9°, 52′, 24″

§. 58. Cum igitur §. 22. anomalia media poſita ſit x, erit pro hoc tempore $x = 99°, 52', 24''$, ex qua anomalia excentri v reperietur per hanc aequationem $v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc.). Cum autem ſit $lk = (-1)$. 3136332, atque a logarithmis ſinuum ſubtrahi debeat, 4, 6855749, coniunctim ſubtrahi debebit 5, 3719417, vt ſinus per k multiplicati in arcus conuertantur. Calculus ergo ita ſe habebit

l ſin. $x = 9, 9935285$
$\quad\quad\quad 5, 3719417$
$\quad\quad\quad 4, 6215868$

k ſin. $x = 41839'' = 697'\ 19'' = 11°, 37', 19''$
ſubtr. ab x $= 99°, 52', 24''$

$x - k$ ſin. $x = 88°, 15', 5''$

l ſin. $= 9, 9997974$
$\quad\quad\quad 5, 3719417$
$\quad\quad\quad 4, 6278557$

numerus: $42248'' = 707', 28'' = 11°, 47', 28''$
ſubtrahatur ab $x = 99°, 52', 24''$

$88°, 4', 56''$

l ſin.

l ſin. = 9, 9997566
5, 3719417

4, 6278149

numerus: 42444'' = 707', 24'' = 11°, 47', 24''
ſubtr. ab x = 99°, 52', 24''
Anomalia excentri v = 88°, 5', 0'

Hinc eſt diſtantia mercurii a ſole $y = a + ak$ coſ. v

$l\,a$ = 4, 5878232
$l\,k$ = (-1), 3136332

$l\,ak$ = 3, 9014564
l coſ. v = 8, 5243430

2, 4257994

ak coſ. v = 266
a = 38710

y = 38976 Diſtantia mercutii a ſole
ly = 4, 5907973.

Ex his inuenitur anomalia vera z ope huius aequationis coſ. $z = \frac{ak\ \text{ſin. tot.}}{y} + \frac{a\ \text{coſ.}\ v}{y}$, quae praebet hunc calculum

$l\ a\ k$ ſin. tot. = 13, 9014564
$l\ y$ = 4, 5907973

9, 3106591

$\frac{ak\ \text{ſin. tot.}}{y}$ = 2044839
l coſ. v = 8, 5243430
$l\ a$ = 4, 5878232

13, 1121662
$l\ y$ = 4, 5907973

8, 5213689

$\frac{a\ \text{coſ.}\ v}{y}$

$$\frac{a \cos v}{y} = 332176$$
$$2044839$$

$$\cos z = 2377015 = \sin 13°, 45', 3''$$

Ergo anomalia vera $z = 76°, 14', 57''$.

§. 59. Nunc ordo poſtulat vt in diſtantiam aphelii a nodo inquiramus, quae poſita eſt e, ex aequatione $\tan e = \frac{\tan(p-q)}{\cos n}$.

$$p = 7 S, 13°, 40'$$
$$q = 0 S, 15°, 42'$$

$$p-q = 6 S, 28°, 6' = 208°, 6'$$
$$\tan(p-q) = \tan 28°, 6'$$
$$l \tan(p-q) = 9, 7275008$$
$$l \cos n = 9, 9968431$$

$$l \tan e = 9, 7306577 = l \tan 28°, 16', 24''$$

Ergo $e = 6 S, 28°, 16', 24'' = 208°, 16', 24''$ qui valor pro omnibus obſeruationibus idem manet. Sequitur longitudo planetae a nodo r, eſtque

$$\tan r = \cos n \tan(e+z)$$
$$e = 6 S, 28°, 16', 24''$$
$$z = 2 S, 16°, 14', 57''$$

$$e+z = 9 S, 14°, 31', 21''$$
$$\tan(e+z) = -\tan 75°, 28', 39''$$
$$l - \tan(e+z) = 10, 5866389$$
$$l \cos n = 9, 9968431$$

$$l - \tan r = 10, 5834820$$
$$\text{Ergo } r = 9 S, 14°, 37', 26''$$

Ad longitudinem planetae a nodo r addatur longitudo nodi

nodi a prima ſtella arietis q, et ſumma erit longitudo mercurii heliocentrica a prima ſtella arietis

$$r = 9S,\ 14^\circ,\ 37',\ 36''$$
$$q = 0S,\ 15^\circ,\ 42'$$
$$r+q = 10S,\ 0^\circ,\ 19',\ 36''$$

Cum igitur longitudo terrae ſit $7S,\ 0^\circ,\ 24',\ 52''$ longitudo heliocentrica mercurii a longitudine geocentrica ſubtracta relinquitur

$$0S,\ 9^\circ,\ 23',\ 32''$$
$$10S,\ 0^\circ,\ 19',\ 36''$$
$$2S,\ 9^\circ,\ 3',\ 56''$$

ergo $q = cof.\ 69^\circ,\ 4'$ et $\frac{s}{c} q = 11''$, cum nunc ſit $-\frac{r}{c} m = 18''$ erit $\frac{s}{c} q - \frac{r}{c} m = 29''$; hincque longitudo mercurii obſeruata ob lucis propagationem augeri debet $29''$ etc. vt ea ſit $0S,\ 9^\circ,\ 24',\ 1''$

Latitudo autem heliocentrica s ad boream reſpiciens ex hac aequatione $ſin.\ s = ſin.\ n\ .\ ſin.\ (e+z)$ definietur, eſtque $ſin.\ (e+z) = -ſin.\ 75^\circ,\ 28',\ 39''$ vnde

$$l - ſin.\ (e+z) = 9,9858974$$
$$l\ ſin. = 9,0796762$$
$$l - ſin.\ s = 9,0655736$$

ergo $s = -6^\circ,\ 40',\ 42''$; ex quo latitudo heliocentrica mercurii erit auſtralis atque $= 6^\circ,\ 40',\ 42''$.

§. 60. Definito loco heliocentrico pergo ad locum mercurii geocentricum ſupputandum, ad quod erit diſtantia terrae a ſole $c = 101318$

$$l c = 5,0056867$$

longitudo terrae $u = 7S,\ 0^\circ,\ 24',\ 52''$

Nunc

Nunc quaeratur angulus $pTV = t$, ex aequatione

$$cot.\, t = cot.\,(u-q-r) - \frac{c}{y\, coſ.\, s\, ſin.\,(u-q-r)}$$

Eſt vero $u = 7S, 0°, 24', 52''$
$q+r = 10S, 0°, 19', 36''$

$u-q-r = 9S, 0°, 5', 16''$
ergo cot. $(u-q-r) = -$ tang. $0°, 5', 16'' = -15319$

Porro $ly =$	4,5907973
l coſ. $s =$	9,9974701
l-ſin. $(u-q-r) =$	9,9999994
l-y coſ. s. ſin. $(u-q-r) =$	24,5882668
lc (ſin. tot.)^{2} $=$	35,0056867
l-y coſ. s ſin. $(u-q-r) =$	24,5882668
	10,4174199
ergo $\frac{-c}{y\, coſ.\, s\, ſin.\,(u-q-r)} =$	26146880
$+$ cot. $(u-q-r) = -$	15319
cot. $t =$	26131561

Ergo t eſt $20°, 56', 27''$ vna cum ſex ſignis, vti conditio problematis requirit, quod figurae repraeſentio facile commonſtrat. Quare cum ſit $t = 6S, 20°, 56', 27''$, hinc longitudo mercurii geocentrica f innoteſcit ex hac aequatione $f = u - t$

Eſt vero $u = 7S, 0°, 24', 52''$
$t = 6S, 20°, 56', 27''$
$f = 0S, 9°, 28', 25''$

Actu autem longitudo mercurii ad hoc tempus obſeruata eſt $F = 0S, 9°, 24', 1''$

Ex quo eſt $F - f = df = -4', 24'' = -264''$ qui eſt error tabularum in longitudine commiſſus.

§. 61.

§. *61*. Latitudo denique Geocentrica g reperietur ex hac aequatione tang. $g = \frac{\text{fin.}\,t.\ \text{tang.}\,s}{\text{fin.}\,(u-q-r)}$

$$l - \text{fin.}\,t = 9,5531590$$
$$l - \text{tang.}\,s = 9,0685182$$
$$18,6216772$$
$$l - \text{fin.}\,(u-q-r) = 9,9999994$$
$$l - \text{tang.}\,g = 8,6216778$$

Ergo $g = -2°, 23', 46''$. Latitudo ergo Geocentrica erit auſtralis atque aequalis $2°, 23', 46''$

Latitudo autem obſeruata eſt $= 2°, 23', 55''$

Erit ergo $G = -2°, 23', 55''$

$$g = -2°, 23', 46''$$

Atque $G - g = dg = -9''$

Qui eſt error tabularum in latitudine commiſſus.

§. *62*. Quod ſi nunc, vt ſupra fecimus, tabulas ponamus correctas, valores inuenti df et dq per aberrationes tabularum inueniendas dm, dp, dq, dn et dk ſequenti modo determinabuntur.

$$df = \frac{(dq+dr)(\text{fin.}\,t)^2}{(\text{fin.}(u-q-r))^2} + \frac{acdk\,\text{cof.}\,z(\text{fin.}\,t)^2}{yy\,\text{cof.}\,s.\,\text{fin.}(u-q-r)} - \frac{a^2ckdm\,\text{fin.}\,v(\text{fin.}\,t)^2}{y^3\,\text{cof.}\,s.\,\text{fin.}(u-q-r)}$$
$$- \frac{cds\,\text{tang.}\,s(\text{fin.}\,t)^2}{y\,\text{cof.}\,s\,\text{fin}(u-q-r)} - \frac{c(dq+dr)\,\text{cot.}\,t(u-q-r)(\text{fin.}\,t)^2}{y\,\text{cof.}\,s\,\text{fin.}(u-q-r)}$$

$$dg = \frac{ds\,\text{fin.}\,t\,(\text{cof.}\,g)^2}{(\text{cof.}\,s)^2\,\text{fin.}\,(u-q-r)} - \frac{df\,\text{cof.}\,t.\,\text{tang.}\,s(\text{cof.}\,g)^2}{\text{fin.}(u-q-r)} + \frac{(dq+dr)\text{fin.}\,t\cdot\text{tang.}\,s(\text{cof.}\,g)^2}{\text{fin.}(u-q-r)\,\text{tang.}(u-q-r)}$$

Aequationes autem ſubſidiariae ſunt hae:

$$ds = \frac{dn\,\text{cof.}\,n.\,\text{fin.}(e+z)}{\text{cof.}\,s} + \frac{(de+dz)\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}(e+z)}{\text{cof.}\,s}$$

$$dr = \frac{(de+dz)\,\text{cof.}\,n(\text{cof.}\,r)^2}{(\text{cof.}(e+))^2} - dn\,\text{fin.}\,n\,\text{tang.}(e+z(\text{cof.}\,r)^2$$

$$de = \frac{(dp-dq)(\text{cof.}\,e)^2}{\text{cof.}\,n(\text{cof.}(p-q))^2} + \frac{dn\,\text{fin.}\,n\,\text{tang.}(p-q)(\text{cof.}\,e)^2}{(\text{cof.}\,n)^2}$$

$$dz = \frac{adm\,\text{fin.}\,z}{y\,\text{fin.}\,v} - \frac{adk\,\text{fin.}\,z}{y} - \frac{dk\,\text{fin}\,z}{1-kk}$$

Quantitatum autem finitarum valores, quae in his formulis inſunt, ita ſe habent

$a = 38710 \;.\; la = 4,5878232$

$c = 101318 \;.\; lc = 5,0056867$

$\frac{1}{1-kk} = \frac{1000000 \cdot 1000000}{794111 \cdot 1205889} \;.\; l\frac{1}{1-kk} = 0,0188112$

$n = 6^\circ, 54'$

$v = -88^\circ, 5'$

$y = 38976. \; ly = 4,5907973$

$z = 76^\circ, 14', 57''$

$p-q = 6S, 28^\circ, 6'$

$e = 6S, 28^\circ, 16', 24''$

$e+z = 9S, 14^\circ, 31', 26''$

$r = 9S, 14^\circ, 37', 26''$

$s = -6^\circ, 40', 42''$

$u-q-r = 9S, 0^\circ, 5', 16''$

$t = 6S, 20^\circ, 56', 27''$

$g = -2^\circ, 23', 46''$

§. 63. Quaeramus primum dz ex aequatione:

$$dz = \frac{adm\, ſin.\, z}{y\, ſin.\, v} - \frac{adk\, ſin.\, z}{y} - \frac{dk\, ſin.\, z}{1-kk}$$

vbi notandum eſt coefficientes ipſius dk in minutis ſecundis exprimi oportere, quia reliqua differentialia omnia dm, dp, dq, et dn in minutis ſecundis definiri debent. Erit ergo

la	=	4, 5878232
lſin.z	=	9, 9873707
		14, 5751939
ly	=	4, 5907973
		9, 9843966

lſin.v

lſin.v = 9, 9997570

(−1), 9846396 l coeff. dm

numerus = 0, 9652 = coeff. dm

$l\frac{a\,ſin.\,z}{y}$ = 9, 9843966

4, 6855749

5, 2988217 = $l\frac{a\,ſin.\,z}{y}$ in ſec.

$\frac{a\,ſin.\,z}{y} = 198985''$

lſin.z = 9, 9873707

$l\frac{1}{1-kk}$ = 0, 0188112

10, 0061819

4, 6855749

5, 3206070 = $l\frac{ſin.\,z}{1-kk}$ in ſec.

$\frac{ſin.\,z}{1-kk} = 209222''$

$408207''$ = coeff. dk

Ergo $dz = 0,9652.\,dm - 408207''.\,dk$

l0, 9652 = (−1), 9846396

l408207′ = 5, 6108805.

§. 64. Deinde quaeratur expreſſio, cui de eſt aequalis ex hac aequatione

$$de = \frac{(dp-dq)(coſ.\,e)^2}{coſ.\,n\,(coſ.\,(p-q))^2} + \frac{dn\,ſin.\,n\,tang.\,(p-q)\,(coſ.\,e)^2}{(coſ.\,n)^2}$$

l−coſ.e = 9, 9448270	l ſin. n = 9, 0796762
l(coſ.e)^2 = 19, 8896540	$l$tang (p-q) = 9, 7275008
l coſ. n = 9, 9968431	l−coſ. p-q) = 9, 9455310
$l$coſ. n)^2 = 19, 9936862	l(coſ.(p-q))^2 = 19, 8910620

 l(coſ.

$$l\,(\text{coſ. } e) = 19,\ 8896540$$
$$\text{coſ. } n = 9,\ 9968431$$
$$19,\ 8928109$$
$$l\,\text{coſ.}\,(p-q))^2 = 19,\ 8910620$$
$$0,\ 0017489$$

coeffic. $(dp - dq) = 1,0040$

Porro l ſin. $n = 9,0796762$
$$l\,\text{tang.}\,(p-q) = 9,7275008$$
$$l\,\text{coſ.}\,e)^2 = 19,8896540$$
$$38,6968310$$
$$l\,(\text{coſ.}\,n)^2 = 19,9936862$$
$$(-2),7031448$$

coeff. $dn = 0,\ 0505$

Ergo $de = 1,0040,\ dp - 1,0040\,dq + 0,0505 \,.\, dn$

$l\,1,0040 = 0,0017489;\ l\,0,0505 = (-2),7031448$

§. 65. Sequitur differentiale ipſius dr ex hac aequatione definiendum:

$$dr = \frac{(de + dz)\,\text{coſ.}\,n\,(\text{coſ.}\,r)^2}{(\text{coſ.}\,(e+z))^2} - dn\ \text{ſin.}\,n\,.\,\text{tang.}\,(e+z)(\text{coſ.}\,r)^2$$

$$l\text{-tang.}\,(e+z) = 10,\ 5866389$$
$$l\,\text{coſ.}\,r = 9,\ 4022145$$
$$l\,(\text{coſ.}\,r)^2 = 18,\ 8044290$$
$$l\,\text{coſ.}\,(e+z) = 9,\ 3992584$$

Ergo l coſ. $n = 9,\ 9968431$
$$l\,(\text{coſ.}\,r)^2 = 18,\ 8044290$$
$$28,\ 8012721$$
$$l(\text{coſ.}\,(e+2)^2 = 18,\ 7985168$$
$$0,\ 0027553$$

coeff.

coeff. $(de + dz) = 1,0064$
Porro l ſin. $n = 9,0796762$
l — tang. $(e+z) = 10,5866389$
$l(\text{coſ.}\, r)^2 = 18,8044290$

$(-2),4707441$

coeff. $-dn = 0,0296.$
Ergo $dr = 1,0064 . dz + 1,0064 . de + 0,0296 . dn$
$l1,0064 = 0,0027553$; $l0,0296 = (-2),4707441$
Valoribus autem ipſorum dz et de ſubſtitutis prodit $dr = 0,9714 . dm - 410805''. dk + 1,0104 . dp - 1,0104 . dq + 0,0804 . dn$
$l0,9714 = (-1),9873949$
$l410805'' = 5,6136358$
$l1,0104 = 0,0045042$
$l0.0804 = (-2),9052560$

§. 66. Habetur praeterea haec aequatio:
$$ds = \frac{dn\, \text{coſ}\, n .\, \text{ſin.}\, (e+z)}{\text{coſ.}\, s} + \frac{(de+dz)\, \text{ſin}\, n .\, \text{coſ.}\, (e+z)}{\text{coſ.}\, s}$$
l — ſin. $(e+z) = 9,9858973$
l coſ. $n = 9,9968431$

$19,9827404$
l coſ. $s = 9,9974701$

$(-1),9852703$
coeff. $-dn = 0,9667$
Porro l ſin. $n = 9,0796762$
l coſ. $(e+z = 9,3992584$

$18,4789346$
l coſ. $s = 9,9974701$

$(-2),4814645$

coeff.

coeff. $(de + dz) = 0,0303$

Ergo $ds = -0,9667 . dn + 0,0303 . dz + 0,0303 . de$. Subſtitutis autem loco dz et de valoribus erit : $ds = 0,0292 . dm - 12369'' . dk + 0,0304 . dp - 0,0304 . dq - 0,9652 . dn$

$$l\,0,0304 = (-2),4832134$$
$$l\,0,0292 = (-2),4661041$$
$$l\,12369'' = 4,0923450$$
$$l\,0,9652 = (-1),9846173$$

§. 67. His praeparatis poterimus tandem definire df ex hac aequatione.

$$df = \frac{(dq + dr)(\text{ſin. } t)^2}{(\text{ſin. }(u-q-r)^2} + \frac{acdk \text{ coſ } z\,(\text{ſin. } t)^2}{yy \text{ coſ. } s. \text{ ſin. }(u-q-r)} - \frac{a^2 ckdm \text{ ſin. } v\,(\text{ſin. } t)}{y^3 \text{ coſ. } s. \text{ ſin. }(u-q-r)}$$
$$- \frac{cds \text{ tang. } s\,(\text{ſin. } t)^2}{y \text{ coſ. } s. \text{ ſin. }(u-q-r)} - \frac{c(dq+dr)\text{ cot. }(u-q-r)\,(\text{ſin. } t)^2}{y \text{ coſ. } s. \text{ ſin. }(u-q-r(}$$

Eſtque $l - \text{ſin. }(u-q-r) = 9,9999994$
$l - \text{cot.}(u-q-r) = 21852304$
$l - \text{ſin. } t = 9,5531590$
$l \text{ coſ. } z = 9,3760292$
$l \text{ ſin. } v = 9,9997570$
$l - y \text{ coſ. } s . \text{ ſin. }(u\text{-}q\text{-}r) = 24,5882668$
$lk = (-1),3136332$

Hinc habetur : $l(\text{ſin. } t)^2 = 19,1063180$
$l(\text{ſ}(u-q-r))^2 = 19,9999988$

$l$coeff. $(dq + dr) = (-1),1063192 : n. = 0,1277$

Porro : $l\,ac = 9,5935099$
$l \text{ coſ. } z = 9,3760292$
$l(\text{ſin. } t)^2 = 19,1063180$

$38,0758571$

ly

ly = 4, 5907973

33, 4850598

l – *y* coſ. *s* ſin. (*u* - *q* - *r*) = 24. 5882668

8, 8967930

4, 6855749

l coeff. – *dk* = 4, 2112181 *n* : = 16264″

Porro *l ac* (ſin. *t*)² = 28, 6998279

l a = 4, 5878232

l k = (–1) 3136332

l ſin. *v* = 9, 9997570

42, 6010413

*ly*² = 9, 1815946

33, 4194467

l-*y* coſ. *s* ſin. (*u* - *q* - *r*) = 24, 5882668 + 10

l coeff. + *dm* = (-2), 8311799 *n* : = 0, 0678

Porro *l c* = 5, 0056867

l – tang. *s* = 9, 0685182

l (ſin. *t*)² = 19, 1063180

33, 1805229

l-*y* coſ. *s* ſin. (*u*-*q*-*r*) = 24, 5882668 + 10

l coeff. – *ds* = (-2), 5922561 *n* = 0, 0391

Denique *lc* (ſin. *t*)² = 24, 1120047

l – cot. (*u* – *q* – *r*) = 7, 1852304

l-*y* coſ. *s* ſin. (*u*-*q* - *r*) = 31, 2972351

24, 5882668

l coeff. – *dq* – *dr* = (-4), 7089683 *n* : = 0, 0005. Erit

Erit ergo $df = 0{,}1272 . dq + 0{,}1272 . dr - 16264'' . dk$
$+ 0{,}0678 . dm - 0{,}0391 . ds$

Atque ſubſtitutis loco dr et ds valoribus inuentis; erit
$df = 0{,}1902 . dm - 68035'' . dk + 0{,}1273 . dp$
$- 0{,}0001 . dq + 0{,}0479 . dn$

§. 68. Reſtat denique vt pari modo alteram aequationem ad hanc obſeruationem accommodemus, quae eſt haec.

$$dg = \frac{ds\, \text{ſin.}\, t\, (\text{coſ.}\, g)^2}{(\text{coſ.}\, s)^2\, \text{ſin}\, (u-q-r)} - \frac{df\, \text{coſ.}\, t\, \text{tang.}\, s (\text{coſ.}\, g)^2}{\text{ſin.}\, (v-q-r)} + \frac{(dq+dr)\, \text{ſin.}\, t\, \text{tang}\, s (\text{coſ.}\, g)^2}{\text{ſin.}\, (u-q-r)\, \text{tang.}\, (u-q-r)}$$

$l\, \text{coſ.}\, g = 9{,}9996201$

$l\, \text{coſ.}\, g)^2 = 19{,}9992402$
$l - \text{ſin.}\, t = 9{,}5531590$

$29{,}5523992$
$l\, \text{coſ.}\, s)^2 = 19{,}9949402$

$9{,}5574590$
$l\text{-ſin.}(u-q-r) = 9{,}9999994$

$l\, \text{coeff.} + ds = (-1){,}5574596$ num : $= 0{,}36096$
Porro $l - \text{coſ.}\, t = 9{,}9703236$
$l - \text{tang.}\, s = 9{,}0685182$
$l\, \text{coſ.}\, g)^2 = 19{,}9992402$

$39{,}0380820$
$l - \text{ſin.}\, (u-q-r) = 9{,}9999994 + 30$
$l\, \text{coeff.} + df = (-1){,}0380826$ num : $= 0{,}10916$
Deinde $l - \text{ſin.}\, t = 9{,}5531590$
$l - \text{tang.}\, s = 9{,}0685182$
$l\, (\text{coſ.}\, g)^2 = 19{,}9992402$

$38{,}0209174$

l – ſin.

$l -$ ſin. $(u-q-r) = 9,9999994$

$28,6209180$

$l -$ cot. $(u-q-r) = 7,1852304 - 40$

l coeff. $+dq+dr = (-5),8061484$ num : $0,00006$

Quamobrem erit.

$dg = 0,36096.ds + 0,10916.df + 0,00006.dq + 0,00006.dr.$

ſubſtitutis autem loco dr et ds valoribus inuentis erit

$dg = 0,10916.df + 0,01062.dm - 4491''.dk$
$+ 0,01104.dp - 0,01098.dq - 0,3480.dn$

Cum igitur ſit $df = -264''$, et $dg = -9''$, vt ſupra inuenimus §. §. 60 et 61, erit $0,10916.df = -29''$ atque ex hac prima obſeruatione habebuntur iſtae duae aequationes pro correctione tabularum:

$$-264'' = 0,1902.dm - 68035''dk + 0,1273.dp - 0,0001.dq + 0,0479.dn$$

et

$$20'' = 0,01062.dm - 4491''.dk + 0,01104.dp - 0,01098.dq - 0,3480.dn$$

§. 69. Progrediamur iam ad ſecundam mercurii obſeruationem, quae ita ſe habet:

Tempore medio A. 1716. Aug. 7d. 22h. 45′, 6″

Longitudo ☿ a 1 ✱ ♈ obſeruata eſt 3S, 9°, 43′, 0″
quam ob lucis propagationem poſtmodum corrigemus.

Latitudo ☿ obſeruata fuit: 0°, 13′, 30″, Borealis

Pro hoc autem tempore inuenta eſt

Longitudo terrae a 1 ✱ ♈ = 9S, 27°, 11′, 36″ = u

Diſtantia terrae a Sole = 101096 = c

vnde $lc = 5,0047340$

Data autem, quibus tabulae corrigendae ſunt ſuperſtructae

ſupra §. 57. exhibuimus. Iam ad hoc tempus ex tabulis ſupputemus anomaliam mediam.

A. 1701	8 S, 4°, 2′, 0″
Anni 15	3, 7, 48, 21
Aug. Menſis	4, 27, 34, 29
ob biſſext: 8.d.	1, 2, 44, 19
22 h	3, 45, 5
45′6″	7, 41
	5 S, 16°, 1′, 55″

Erit igitur anomalia media $x = 166°, 1', 55''$ et ſin. $x =$ ſin. $13°, 58', 5''$. Hinc reperietur anomalia media $v = 162°, 28', 52''$; et ex hac porro diſtantia mercurii a ſole: $l\,ak = 3,9014564$

$$l - \text{coſ.}\ v. = 9,9793743$$

$$3,8808307$$

$$ak\ \text{coſ.}\ v = -7600$$

$$a = 38710$$

Ergo diſtantia ☿ a Sole $y = 31110$, et $ly = 4,4929000$

Deinde hinc colligitur anomalia vera mercurii, z

$$l\,ak\ \text{ſin. tot.} = 13,9014564$$

$$ly = 4,4929000$$

$$9,4085564$$

$$\frac{ak\ \text{ſin. tot.}}{y} = 2561867$$

$$\text{Porr}\ l - \text{coſ.}\ v = 9,9793743$$

$$l\,a = 4,5878232$$

$$14,5671975$$

$$l\,y = 4,4929000$$

$$10,0742975$$

—a

$$-\frac{a\,coſ.\,v}{y} = 11865817$$
$$+\frac{a\,k\,ſin.\,tot.}{y} = 2561867$$
$$coſ.\ z = -\ 9303950 = -ſin.\,68°,\,29',\,49''$$
$$\text{Ergo}\ z = 158°,\,29',\,49''$$

§. 70. Diſtantia aphelii a nodo e manet perpetuo eadem, eſtque $e = 6\,S,\ 28°,\ 16',\ 24''$. Ex hac vero reperietur longitudo mercurii a nodo tang. $r =$ coſ. n tang. $(e+z)$

$$e = 6\,S,\ 28°,\ 16',\ 24''$$
$$z = 5\,S,\ \ 8°,\ 29',\ 49''$$
$$e+z = 0\,S,\ \ 6°,\ 46',\ 13''$$
$$l\,tang.\,(e+z) = 9,\ 0745115$$
$$l\,coſ.\ n = 9,\ 9968431$$
$$l\,tang.\ r = 9,\ 0713546$$
$$\text{Ergo}\ r = 0\,S,\ 6°,\ 43',\ 18''$$
$$\text{at}\ q = 0\,S,\ 15°,\ 42',\ 0''$$
$$r+q = 0\,S,\ 22°,\ 25',\ 18''$$

quae eſt longitudo planetae heliocentrica: Latitudo autem heliocentrica ita inuenietur.

$$l\,ſin.\,(e+z) = 9,\ 0714725$$
$$l\,ſin.\ n = 9,\ 0796762$$
$$l\,ſin.\ s = 8,\ 1511487$$

Ergo $s = 0°,\ 48',\ 41''$ Latitudo ergo heliocentrica eſt borealis, atque $= 0°,\ 48',\ 41''$. Sic itaque inuentus eſt locus mercurii heliocentricus ad tempus ſecundae obſeruationis.

§. 71. Antequam hinc ad locum mercurii geocentricum inueſtigandum procedam, correctionem ex propagatione lucis ortam definire conueniet, quae cum ſit $= \frac{s}{c} q - \frac{r}{c}$ atque iam ſupra inuentum ſit $\frac{r}{c} m = -18'' \frac{3}{4}$: quaeratur q

long. ☿ geocentrica = 3 S, 9°, 43′, 0″
long. ☿ heliocentrica = 0 S, 22°, 25′, 18″

diff. 2 S, 17°, 17′, 42″

Ergo $q =$ coſ. 77°, 17′, 42″
$lq = 9, 3421190$
ſubtr. 8, 4996405

0, 8424785

Ergo $\frac{s}{c} q = 7''$

Quamobrem longitudo mercurii obſeruata augeri debet 26″ ita vt ſit vera longitudo mercurii F = 3 S, 9°, 43′, 26″ atque latitudo G = 0°, 13′, 30″.

§. 72. Vt nunc locum mercurii geocentricum definiamus, quaerendus primum eſt angulus p T V ex hac aequatione cot. $t =$ cot. $(u-q-r) - \frac{c}{y \cos. s \sin. (u-q-r)}$.
at eſt $u = 9$S, 27°, 11′, 36″
$q+r = 0$S, 22°, 25′, 18″

$u-q-r = 9$S, 4°, 46′, 18″

cot.$(u-q-r) =$ − tang. 4°, 46′, 18″ = − 834743
$l\,y$ = 4, 4929000
l coſ. s = 9, 9999564
l-ſin.$(u-q-r)$ = 9, 9984921

l−y

$$l\text{-}y\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}(u-q-r) = 24,4913485$$
$$a\,l(\text{ſin. tot.})^3 = 35,0047340$$
$$10,5133855$$

$$\frac{-c}{y\,\text{coſ.}\,s\,\text{ſin.}(u-q-r)} = 32612610$$
$$+\text{cot.}(u-q-r) = -834743$$

$$\text{cot.}\,t = 31777867 = \text{tang.}\;72^\circ,\;31',\;55''$$

Ergo $t = 17^\circ,\ 28',\ 5''$ vna cum 6 ſignis.

Cum igitur inuentus ſit valor anguli $p\text{TV} = t$; ita longitudo geocentrica reperietur

$$t = 6\,S,\;17^\circ,\;28',\;5''$$
$$u = 9\,S,\;27^\circ,\;11',\;36''$$
$$u-t = 3\,S,\;9^\circ,\;43',\;31''$$

Erit igitur ob $f = u-t$ longitudo geocentrica ex tabulis inuenta $f = 3\,S,\ 9^\circ,\ 43',\ 31''$

Quare cum vera longitudo hoc tempore ex obſeruationibus deducta ſit:

$$F = 3\,S,\;9^\circ,\;43,\;26''$$

Erit $F - f = df = -5''$.

§. 73. Latitudo g denique geocentrica g obtinebitur ex hac aequatione $\text{tang.}\,g = \frac{\text{ſin.}\,t\ \text{tang.}\,s}{\text{ſin.}(u-q-r)}$

vnde

$$l\text{-}\text{ſin.}\,t = 9,4773730$$
$$l\,\text{tang.}\,s = 8,1511923$$
$$17,6285653$$
$$l\text{-}\text{ſin.}(u-q-r) = 9,9984921$$
$$l\,\text{tang.}\,g = 7,9300732$$

 Ergo

Ergo $g = 0°, 14', 40''$ At eſt latitudo
vera $G = 0, 13', 30''$ Quare erit
$G-g = dg = -, 70''$

§. 74. Definiamus nunc ordine valores differentialium dz, de, dr, ds, df et dg. ac primo quidem differentiale dz ad modum §. 63.

$$
\begin{array}{rl}
l\,a = & 4,\ 5878232 \\
l\,\text{ſin.}\,z = & 9,\ 5641341 \\
\hline
& 14,\ 1519573 \\
l\,y = & 4,\ 4929000 \\
\hline
& 9,\ 6590573 \\
l\,\text{ſin.}\,v = & 9,\ 4785956 \\
\hline
l\,\text{coeff.}\,dm = & 0,\ 1804617 \\
\text{coeff.} + dm = & 1,\ 5151
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Porro eſt } l\,\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} = & 9,\ 6590573 \\
& 4,\ 6855749 \\
\hline
& 4,\ 9734824 \\
\text{Num. in ſecundis} = & 94077 \\
l\,\text{ſin.}\,z = & 9,\ 5641341 \\
l\,\frac{1}{1-kk} = & 0,\ 0188112 \\
\hline
& 9,\ 5829453 \\
& 4,\ 6855749 \\
\hline
& 4,\ 8973704 \\
\text{Numerus in ſecundis} = & 78954'' \\
& 94077 \\
\hline
\text{Coeff. } dk = & 173031''.
\end{array}
$$

Ergo

Ergo $dz = 1,5151 . dm - 173031''. dk$

$l\,1,5151 = 0,1804617$

$l\,173031 = 5,2381230$

Deinde de retinet valorem ſuum vt ante §. 64. $de =$

$1,0040 . dp - 1,0040 . dq + 0,0505 . dn$

$l\,1,0040 = 0,0017489$

$l\,0,0505 = (-2),7031448$

§. 75. Hunc ad modum §. 65 quaeramus dr.

l coſ. $r = 9,9970045$

l coſ. $(e+z) = 9,9969610$

Ergo l coſ. $n = 9,9968431$

l (coſ. $r)^2 = 19,9940090$

$29,9908521$

l coſ. $(e+z)^2 = 19,9939220$

$(-1),9969301 = l$ coeff. $(de + dz)$

l ſin. $n = 9,0796762$

l tang. $(e+z) = 9,0745115$

l (coſ. $r)^2 = 19,9940090$

$(-2),1481967$

coeff. $- dn = 0,01406$

Ergo $dr = 1,5045 . dm - 171812''. dk + 0,99696.$

$dp - 0,99696 . dq - 0,03606 . dn$

$l\,1,5045 = 0,1773918$	$l\,0,99696 = (-1),9986790$
$l\,171812'' = 5,2350531$	$l\,0,03606 = (-2),5570257$

Ad modum §. 66 quaeratur valor ipſius ds vt ſequitur

l ſin.

$$l\,\text{ſin.}\,(e+z) = 9,0714725$$
$$l\,\text{coſ.}\,n = 9,9968431$$
$$19,0683156$$
$$l\,\text{coſ.}\,s = 9,9999564$$
$$l\,\text{coeff.}\,dn = (-1),0683592$$
$$\text{coeff.}\,dn = 0,11704$$
$$l\,\text{ſin.}\,n = 9,0796762$$
$$l\,\text{coſ.}\,(e+z) = 9,9969610$$
$$19,0766372$$
$$l\,\text{coſ.}\,s = 9,9999564$$
$$l\,\text{coeff.}\,(de+dz) = (-1),0766808$$

Ergo $ds = 0,18078\,.\,dm - 20644''.\,dk + 0,1198.\,dp - 0,1198\,.\,dq + 0,12306\,.\,dn$

$$l\,0,18078 = (-1),2571425$$
$$l\,20644'' = 4,3148038$$
$$l\,0,1198 = (-1),0784297$$
$$l\,0,12306 = (-1),0901170$$

§. 76. His praemiſſis determinetur valor ipſius df ſecundum §. 67:

$$l\,(\text{ſin.}\,t)^2 = 18,9547460$$
$$l\,(\text{ſin.}(u-q-r))^2 = 19,9969842$$
$$(-2),9577618$$

$$\text{coeff.} + dq + dr = 0,09073$$
$$l\,ac = 9,5925572$$

l—

l — coſ. z =	9, 9686688
l (ſin. t)^2 =	18, 9547460
	38, 5159720
$l\, y$ =	4, 4929000
	34, 0230720
l-y coſ. ſ ſin. (u-q-r) =	24, 4913485
	9, 5317235
	4, 6855749
l coeff. + $d\, k$ =	4, 8461486
coeff. + $d\, k$ =	70169″
l ac (ſin. t)^2 =	28, 5473032
$l\, a$ =	4, 5878232
$l\, k$ =	(-1), 3136332
l ſin. v =	9, 4785956
	41, 9273552
l -y^2 coſ. ſ ſin. (u-q-r) =	33, 4771485
l coeff. + $d\, m$ =	(-2), 4502067
coeff. + $d\, m$ =	0, 02819
$l\, c$ =	5, 0047340
l tang. ſ =	8, 1511923
l (ſin. t)^2 =	18, 9547460
	32, 1106723
-y coſ. ſ. ſin. (u-q-r) =	24, 4913485
l coeff. + d ſ =	(-3), 6193238
$l\, c$ (ſin. t)^2 =	23, 9594800

$l-$ cot. $(u-q-r) = 8,9215526$

$32,8710326$

$l-y$ coſ. s ſin. $(u-q-r) = 24,4913485$

$(-2),3796841$

coeff. $-dq-dr = 0,02397$

coeff. $+dq+dr = 0,09073$

coeff. $+dq+dr = 0,06676$ log. $=(-2),8245163$

Ergo $df = 0,1294.dm + 58612''.dk + 0,0670.$
$dp - 0,00028.dq - 0,0019.dn$

§. 77. Reſtat denique valor dg, ex §. 68. inueniendus

$l(\text{coſ.}\ g)^2 = 19,9999922$

$l-$ ſin. $t = 9,4773730$

$29,4773652$

$l(\text{coſ.}\ s)^2 = 19,9999128$

$9,4774524$

$l-$ ſin. $(u-q-r) = 9,9983921 - 10$

l coeff. $+ds = (-1),4789603$

$l-$ coſ $t = 9,9794958$

l tang. $s = 8,1511923$

$l(\text{coſ.}\ g)^2 = 19,9999922$

$38,1306803$

$l-$ ſin. $(u-q-r) = 9,9984921 + 30$

$(-2),1321882$

coeff. $-df = 0,01356$

$l-$

$l -$ ſin. $t\ (\text{coſ.}\ g)^2 = 29,4773652$

l tang. $s = 8,1511923$

$l -$ cot. $(u\text{-}q\text{-}r) = 8,9215526$

$46,5501101$

$l -$ ſin. $(u\text{-}q\text{-}r) = 9,9984921 + 40$

l coeff. $- dq - dr = (-4), 5516180$

coeff. $- dq - dr = 0,00036.$

Hinc itaque prodit

$dg = -0,01356 . df + 0,0539 . dm - 6158''. dk$
$+ 0,03574 . dp - 0,0361 . dq + 0,3708 . dn.$

Cum nunc ſit $df = -5''$ et $dg = -70''$

habebuntur ex obſeruatione ſecunda hae duae aequationes:

$-5'' = 0,1294 . dm + 58612'' . dk + 0,0670 .$
$dp - 0,00028 . dq - 0,0019 . dn$

et

$-70'' = 0,0539 . dm - 6158''. dk + 0,0357. dp$
$- 0.0361 . dq + 0,03708 . dn.$

§. 78. Reſidua eſt vltima obſeruatio, quae ita ſe habet:

Tempore medio A. 1717. April. 25 d. h. 33′, 7″

Longitudo ☿ *a* 1 ✱ ♈ obſeruata eſt 0 *S*, 14°, 28′, 14″

Latitudo ☿ obſeruata eſt 0°, 18′, 30′. Auſtralis.

Pro hoc autem tempore inuenta eſt

Longitudo terrae *a* 1 ✱ ♈ : $u = 6$ S, 17°, 27′, 5″.

Diſtantia terrae *a* ſole $c = 101045$

et $lc = 5,0045148.$

Ex tabulis igitur aſſignemus ad hoc tempus anomaliam mercurii mediam:

A. 1701	3 S, 4°, 2′, 0″
Anni: 10	5, 5, 36, 0
April.	0, 8, 18, 36
25 d	3, 12, 18, 30
23 h	3, 55, 19
35′, 7″	5, 59
	5 S, 4°, 10′, 25″

Eſt ergo $x = 154°, 16', 25''$. et ſin. $x =$ ſin. $25°, 43', 35''$, vnde inuenitur anomalia excentri v.

l ſin. $x = 9,6375000$
5, 3719417
4, 2655583

num: $= 18431'' = 5°, 7', 11''$
$x = 154°, 16', 25$
149°, 9′, 14″ | 30°, 50′, 46″

l ſin. $= 9, 7099000$
5, 3719417
4, 3379583

num. $= 21775'' = 6°, 2', 55''$
$x = 154°, 16', 25''$
148°, 13′, 30″ | 31°, 46′, 30″

l ſin. $= 9, 7214684$
5, 3719417
5, 3495267

num.

num. $= 22363'' = 6°, 12', 43''$

$x = 154°, 16', 25''$

$148°, 3', 42''$ | $31°, 56', 18''$

l ſin. $= 9, 7234607$

$5, 3719417$

$4, 3515190$

num. $= 22475'' = 6°, 14', 35''$

$x = 154°, 16', 25''$

$148°, 1', 50''$ | $31°, 58', 10''$

l ſin. $= 9, 7238388$

$5, 3719417$

$4, 3518971$

num. $= 22485'' = 6°, 14', 45''$

$x = 154°, 16', 25''$

$148°, 1', 40''$ | $31°, 58', 20''$

l ſin. $= 9, 7238726$

$5, 3719417$

$4, 3519309$

num. $= 22487'' = 6°, 14', 47''$

$x = 154°, 16', 25$

$v = 148°, 1', 38''$

Ergo anomalia excentri $v = 4S, 28°, 1', 38''$

et l ſin. $v = 9, 7238793$ et

l-coſ. $v = 9, 9285494$

$lak = 3, 9014564$

$3, 8300058$

$+ ak$ coſ. $v = -6761$

$a = 38710$

$y = 31949$ et $ly = 4, 5044573$

$la k$ ſin. tot. $= 13, 9014564$

$ly = 4, 5044573$

$9, 3969991$

$\frac{ak\,ſin.\,tot.}{y} = 24\ 94589$

Porro $l-$coſ. $v = 9, 9285494$

$la = 4, 5878232$

$14, 5163726$

$ly = 4, 5044573$

$10, 0119153$

$\frac{-a\,coſ.v}{y} = 10278160$

$\frac{ak\,ſin.\,tot.}{y} = 2494589$

coſ. $z = -7783571 = -$ ſin. $51°, 6', 38''$

vnde $l-$ coſ. $z = 9, 8911799$

Ergo $z = 4S, 21°, 6', 38''$

et l ſin. $z = 9, 7978349$

§. 79 Pergamus ad longitudinem mercurii a nodo, r definiendam:

$e = 6S, 28°, 16', 24''$

$z = 4S, 21°, 6', 38''$

$e+z = 11S, 19°, 23', 2''$

$l-$ tang. $(e+z) = 9, 2728529$

l coſ. $n = 9, 9968431$

l tang. $-r = 9, 2096960$

Ergo

Ergo $r = 11S, 19^\circ, 27', 32''$
$q = 0S, 15^\circ, 42', 0''$

$r + q = 0S, 5^\circ, 9', 32''$
quae eſt longitudo mercurii heliocentrica.
Longitudo ☿ geocentrica $0S, 14^\circ, 28', 14''$
- - - - - - heliocentrica $0S, 5^\circ, 9', 32''$

$9^\circ, 18', 42''$
Ergo ad correctionem a lucis propagatione oriundam eſt
$q = \text{coſ.}\ 9^\circ, 18', 42''$
et $lq = 9, 9942537$
$l\frac{c}{s} = 3, 8140656$

$6, 1801881$
$4, 6855749$

$1, 4946132$
Ergo $\frac{s}{c} = 31''$ et $-\frac{r}{c}m = 19''$. Ergo longitudo obſeruata augeri debet $56''$, ita vt ea futura ſit
$F = 0S, 14^\circ, 29', 4''$

§. 80. Latitudo heliocentrica s obtinebitur ad modum §. 59. ex aequatione ſin. s = ſin. n. ſin $(e + z)$
At eſt l – ſin. $(e + z) = 9, 2653550$
l ſin. n $= 9, 0796762$

l – ſin. s $= 8, 3450312$
Ergo $s = -1^\circ, 16', 5''$
Quare latitudo heliocentrica eſt auſtralis, atque $= 1^\circ, 16', 5''$.

§. 81

§. 81. Ad locum geocentricum mercurii definiendum ſequamur operationes §. 60. inſtitutas.

$u = 6\,S.\ 17°,\ 27',\ 5''$

$q+r = 0\,S,\ 5°,\ 9',\ 32''$

$u-q-r = 6\,S,\ 12°,\ 17',\ 33''$

$\cot(u-q-r) = \text{tang. } 77°,\ 42',\ 27'' = 45893023$

Porro $l\,y = 4,5044573$

$l \operatorname{coſ} s = 9,9998937$

$l - \text{ſin.}(u-q-r) = 9,3281807$

$23,8325317 = l - y \operatorname{coſ.} s \text{ ſin.}(u-q-r)$

$lc\,(\text{ſin. tot.})^2 = 35,0045148$

$11,1719831$

$\frac{-c}{y \operatorname{coſ.} s \text{ ſin. } (u-q-r)} = 148587800$

$\cot.(u-q-r) = 45893023$

$\cot. t = 194480823$

$l \cot. t = 11,2888767 = l \text{ tang. } 87°,\ 3',\ 2''$

et $t = 2°,\ 56',\ 58''$ vna cum 6 ſignis: ex quo ita longitudo geocentrica prodibit

$u = 6\,S,\ 17°,\ 27',\ 5''$

$t = 6\,S,\ 2°,\ 56',\ 58''$

$u-t = 0\,S,\ 14°,\ 30',\ 7'' = f.$

Haecque eſt longitudo geocentrica, quam tabulae praebent, quae cum obſeruata comparata dabit valorem ipſius df.

$F = 0\,S,\ 14°,\ 29',\ 4''$

$f = 0\,S,\ 14°,\ 30',\ 7''$

$F-f = -1',\ 3'' = -63'' = df.$

qui eſt error tabularum in longitudine commiſſus. §.

§. 82. Latitudo geocentrica g ita inuenietur ſecundum §. 61.

l – ſin. t = 8, 7114246
l – tang. s = 8, 3451375

17, 0565021
l – ſin $(u-q-r)$ = 9, 3281807

l – tang. g = 7, 7283214
Ergo g = – 0°, 18′, 24″ latitudo geocentrica
At eſt G = – 0°, 18′, 30″ vnde

G – g = dg = – 6″. error latitudinis.

§. 83. Definiamus nunc ordine valores differentiales dz, dr, ds, df et dg, ac primum dz ad modum §. 63

$l a$ = 4, 5878232
l ſin. z = 9, 7978349

14, 3856581
$l y$ = 4, 5044573

9, 8812008
l ſin. v = 9, 7238793

0, 1573215
coeff. dm = 1, 4366
$l \frac{a\,ſin.\,z}{y}$ = 9, 8812008
4, 6855749

5, 1956259
num : = 156901″
l ſin. z = 9, 7978349

$l\frac{1}{1-kk} = 0,0188112$

$9,8100461$
$4,6855749$

$5,1310712$

num : $= 135229''$
156901

$292130'' =$ coeff. $-dk$

Ergo $dz = 1,4366.dm - 292130''.dk$

$l\,1,4366 = 0,1573215$
$l\,292130'' = 5,4655762$

Atque vt hactenus manet;

$de = 1,0040.dp - 1,0040.dq + 0,0505.dn$
$l\,1,0040 = 0,0017489$
$l\,0,0505 = (-2),7031448$

§. 84. Definiatur nunc differentialis dr valor

$l -$ tang $(e+z) = 9,2728529$
l ſin. $n = 9,0796762$
l (coſ. $r)^2 = 19,9852164$

$38,3377455 - 40$

l coeff. $dn = (-2),3377455$
coeff. $dn = 0,02176$

l coſ. $n = 9,9968431$
l (coſ. $r)^2 = 19,9852164$

$29,9820595$

l (coſ. $(e+z))^2 = 19,9850042$
l coeff. $de + dz = (-1),9970553$ hincque

dr

$dr = 1,4268 \,.\, dm - 290156 \,.\, dk + 0,9974 \,.\, dp$
$- 0,9974 \,.\, dq + 0,0719 \,.\, dn$

$l\,1,4268 = 0,1543768$
$l\,290156 = 5,4626315$
$l\,0,9974 = (-1),9988042$
$l\,0,0719 = (-2),8567289$

Porro l-ſin. $(e+z) = 9,2653550$
l coſ. $n = 9,9968431$

$19,2621981$
l coſ. $s = 9,9998937$

l coeff. $-dn = (-1),2623044$
coeff. $-dn = 0,1829$

l coſ. $(e+z) = 9,9925021$
l ſin. $n = 9,0796762$

$19,0721783$
l coſ. $s = 9,9998937$

l coeff. $de+dz = (-1),0722846$ hincque
$ds = 0,16967 \,.\, dm - 34503 \,.\, dk + 0,1186 \,.\, dp$
$-0,1186 \,.\, dq - 0,1770 \,.\, dn$

$l\,0,16967 = (-1),2296061$
$l\,34503 = 4,5378608$
$l\,0,1186 = (-1),0740335$
$l\,0,1770 = (-1),2479733.$

§. 85. His praeparatis quaeramus valorem ipſius df
$l\,(\text{ſin.}\ b)^2 = 17,4228492$
$l\,(\text{ſin}\ (u\text{-}q\text{-}r))^2 = 18,6563614$

l coeff. $dq + dr = (-2),7664878$

coeff $dq + dr$	=	0, 05841
$l\,a$	=	4, 5878232
$l\,c$	=	5, 0045148
l - coſ. z	=	9, 8911799
$l\,(\text{ſin.}\,t)^2$	=	17, 4228402
		36, 9003071
$l\,y$	=	4, 5044573
		32, 4019098
l-y coſ. s ſin. $(u\text{-}q\text{-}r)$	=	23, 8325317
		8, 5093781
		4, 6855749
l coeff. + dk	=	3, 8838032
coeff. + dk	=	7653″
$l\,ac\,(\text{ſin.}\,t)^2$	=	27, 0151872
$l\,ak$	=	3, 9014564
l ſin. v	=	9, 7238793
		40, 6405229
$l\,y^2$	=	9, 0089146
		31, 0310083
l-y coſ. s ſin. $(u\text{-}q\text{-}r)$	=	23, 8325317 + 10
l coeff. + dm	=	(-3), 7990766
coeff. + dm	=	0, 0063
$l\,c$	=	5, 0045148
l — tang. s	=	8, 3451375

l ſin.

$l(\text{ſin. } t)^2 = 17,4228492$

$30,7725015$

$l\text{-}y \text{ coſ. } s \text{ ſin. } (u-q-r) = 23,8325317 + 10$

$l \text{ coeff. } - ds = (-4),9399698$

$l c (\text{ſin } t)^2 = 22,4273640$

$l \text{ cot. } (u-q-r) = 10,6617465$

$33,0891105$

$l\text{-}y \text{ coſ. } s \text{ ſin. } (u-q-r) = 23,8325317 + 10$

$l \text{ coeff. } + dq + dr = (-1),2565788$

$\text{coeff. } + dq + dr = 0,14055$

$0,05841$

$\text{coeff. } + dq + dr = 0,23896 : \log. = (-1),3783252$

Ex his inuenitur:

$dj = -63'' = 0,3471.dm - 60074''.dk + 0,2382.dp$
$+ 0,00056.dq + 0,01733.dn$

§. 86. Reſtat vt dg definiamus ſecundum §. 68.

$l(\text{coſ. } g)^2 = 19,9999876$

$l - \text{ſin. } t = 8,7114246$

$28,7114122$

$l(\text{coſ. } s)^2 = 19,9997874$

$8,7110248$

$l - \text{ſin. } (u-q-r) = 9,3281807$

$l \text{ coeff. } + ds = (-1),3834441$

$l(\text{coſ. } g)^2 = 19,9999876$

$$\begin{aligned} l-\text{tang.}\,s &= 8,3451375 \\ l-\text{coſ.}\,t &= 9,9994244 \\ \hline & 38,3445495 \\ l-\text{ſin.}(u-q-r) &= 9,3281807 + 30 \\ \hline l\,\text{coeff.} + df &= (-1),0163688 \\ \text{coeff.} + df &= 0,10384 \\ \hline l(\text{coſ.}\,g)^2 - \text{tang.}\,s &= 28,3451251 \\ l-\text{ſin.}\,t &= 8,7114246 \\ \hline & 37,0565497 \\ l-\text{ſin.}\,(u-q-r) &= 9,32818\;7 \\ \hline & 27,7283690 \\ l\,\text{cot.}\,(u-q-r) &= 10,6617465 \\ \hline l\,\text{coeff:} - dq - dr &= (-2),3901155 \\ \text{coeff:} - dq - dr &= 0,02455 \end{aligned}$$

hincque

$$dg = -6''\,0,10384.df + 0,006.dm - 1219''.dk + 0,0042.dp - 0,0287.dq - 0,0445.dn$$

atque loco df reſtituto valore $63''$ prodibit

$$0 = 0,006.\,dm - 1219''.\,dk + 0,0042.\,dp - 0,0287.\,dq - 0,0445.\,dn$$

§. 87. Ex his igitur tribus obſeruationibus, earumque cum tabulis comparatione aſſecuti ſumus ſequentes ſex aequationes:

I. $-264'' = 0,1902.dm - 68035''.dk + 0,1273.dp - 0,0001.\,dq + 0,0479.\,dn$

II. $20'' = 0,01062.\,dm - 4491''.dk + 0,01104.\,dp - 0,01098.dq - 0,3480.dn$

III.

III. $-5'' = 0{,}1294.dm + 58612''.dk + 0{,}0670.dp$
$- 0{,}00028.dq - 0{,}0019.dn$

IV. $-70'' = 0{,}0539.dm - 6158''.dk + 0{,}0357.dp$
$- 0{,}0361.dq + 0{,}03708.dn$

V. $-63'' = 0{,}3471.dm - 60074''.dk + 0{,}2382.dp$
$+ 0{,}00056.dq + 0{,}01733.dn$

VI. $0 = 0{,}006.dm - 1219''.dk + 0{,}0042.dp$
$- 0{,}0287.dq - 0{,}0445.dn.$

inter quas aequationes quarta nobis aliquantum ſuſpecta eſſe debet, eo quod orta eſt ex diſcrimine latitudinis obſeruatae, et per tabulas inuentae, ſatis enormi ſcilicet 70″: quamobrem reliquis quinque aequationibus vti conueniet. Vltima autem aequatio praebet:

$dm = 203166''.dk - 0{,}7.dp + 4{,}783.dq + 7{,}416.dn$

quae in prima ſubſtituta dat hanc:

$-264'' = -29393''.dk - 0{,}0058dp + 0{,}9096.dq + 1{,}4585.dn$

ex qua deducitur

$dn = -181'' + 20153''.dk + 0{,}00398\,dp - 0{,}62363\,dq$

et

$dm = -1342'' + 352622''.dk - 0{,}67\,dp + 0{,}158\,dq$

Hi valores in aequatione ſecunda ſubſtituti dabunt

$dq = -148'' + 39647''.dk - 0{,}01277.dp$

$dn = -89'' - 4572''.dk + 0{,}01194.dp$

$dm = -1365'' + 358886.dk - 0{,}67202.dp$

In ſubſidium vocentur aequationes tertia et quinta, atque habebitur

$0 = -177'' + 105050''.dk + 0{,}01968.dp$

et

$0 = -410'' + 64439''.dk + 0{,}00518.dp$

ex quibus ſi eliminetur *dp*, deducetur

dk

$dk = \frac{1271}{349918} = 0,003635$

hincque retrogrediendo obtinebitur

$dp = 10417'' = 2°, 53', 37''$

$dm = -7061'' = -1°, 57', 40''$

$dq = -137'' = - \quad 2', 17''$

$dn = \quad 19'' = + \quad 19''$

§. 88. His igitur correctionibus inuentis Tabulae mercurii ſequenti modo ſe habebunt. Primo ſcilicet tabula motus medii mercurii, quam aſſumſimus, vſurpari poterit, verum ab anomalia media ad quoduis tempus ex his tabulis inuenta conſtanter ſubtrahi debet 1°, 57', 40'', ita vt ad initium huius ſeculi A. 1701 pro meridiano Londinenſi fuerit anomalia media mercurii 8 S, 2°, 4', 20''. Secundo excentricitas orbitae mercurii vera excedit eam, quae in tabulis eſt aſſumta, eritque ea $= \frac{209524}{1000000}$ atque huius excentricitatis logarithmus eſt $= (-1), 3212338$. Tertio longitudo aphelii a prima ſtella arietis erit $=$ 7 S, 16°, 41', 37''. Quarto longitudo nodi aſcendentis ab eodem termino eſt $=$ 0 S, 15°, 39'. 43''; et quinto inclinatio orbitae $= 6°, 54', 19''$.

§. 89. Cum nunc hae tabulae correctae cum veritate exactiſſime conſentire debeant, ſi quidem obſeruationes, quibus ſum vſus, ſumma cura ſint factae; earum ope ad quod vis tempus locus mercurii verus poterit aſſignari, isque adeo geocentricus, ſi tabulae ſolares ſupra correctae ſimul adhibeantur. Quo igitur certitudo harum tabularum tam mercurii, quam ſolis ad obſeruationes examinari queat, inueſtigabo per illas tranſitum mercurii per ſolem, qui huius anni menſe Aprili intra dies 21 et 22

con-

contingere debet : quem in finem ante omnia tam loca ſolis quam mercurii ad meridiem vtriusque diei determinari oportet, vt quo inter illos meridies momento tranſitus mercurii per ſolem celebretur, colligi queat : computabo autem haec loca ad tempus medium pro meridiano Londinenſi, quia inde concluſio ad quascunque regiones transferri poteſt.

§. 90. Incipiamus a loco ſolis, quem ad meridiem cum diei 21 tum 22 Aprilis huius anni 1740 quaeramus, qui annus cum ſit biſextilis, dies computari debent 22 et 23. Erit igitur

	Anomalia media ſolis			
A. 1721 .	6 S,	13°,	10′,	14″
Anni 19 .	11,	29,	8,	24
April. d. 22 .	3,	20,	23,	18
	10,	2°,	41′,	56″
			59′,	8″
April. d. 23.	10,	3°,	41′,	4″

Erit ergo pro meridiano Londinenſi et ſtilo veteri

A. 1740	Anomalia media terrae
meridie Aprilis 21	10 S, 2°, 41′, 56″
meridie Aprilis 22	10 S, 3, 41, 4

Ad has anomalias medias quaerantur iam anomaliae excentri per excentricitatem orbitae terrae correctam methodo ſupra tradita. Priore nempe die erit $x = 10$ S, 2°, 41′, 56″, atque ſin. $x = -$ ſin. 57°, 18′, 4″, vnde ſequens orietur calculus :

$l - x = 9,\ 9250651$
ſubtr. $6,\ 4583825$

$3,\ 4006826$
num. $2929'' = 48',\ 49''$
addatur $x = 10\,S, 2^{\circ}, 41'\ 56''$

$10\,S, 3^{\circ}, 30', 45''$
ab $12\,S$

$56^{\circ}, 29', 15''$
l – ſin. $= 9,\ 9210438$
ſubtr. $6,\ 4583825$

$3,\ 4626613$
num. $2902'' = 48',\ 22''$
$x = 10\,S, 2^{\circ}, 41', 56''$

$v = 10\,S, 3^{\circ}\ 30', 19''$ anomalia excentri.

Pro ſequente meridie eſt $x = 10\,S, 3^{\circ}, 41', 4''$, et ſin. $x = -$ ſin. $56^{\circ}, 18', 56''$

l – ſin. $x = 9,\ 9201836$
$6,\ 4583825$

$3,\ 4618011$
num. $2896'' = 48',\ 16''$
$x = 10\,S, 3^{\circ}, 41',\ 4''$

$10\,S, 4^{\circ}, 29', 20''$
ab $12\,S$

$55^{\circ}, 30', 40''$
l – ſin. $= 9,\ 9160516$

6,

6, 4583825

3, 4576691

num. $2868'' = 47', 48''$

$x = 10\,S, 3^\circ, 41', 4''$

$10\,S, 4^\circ, 28', 52''$

$12\,S$

$55^\circ, 31', 8''$

l – ſin. = 9, 9160900

6, 4583825

3, 4577075

num. $2869'' = 47', 49''$

$x = 10\,S, 3^\circ, 41', 4''$

$v = 10\,S, 4^\circ, 28', 53''$ Anomalia excentri.

§. 91. Hinc ad haec tempora reperitur diſtantia terrae a ſole $y = a + k\,a$ coſ. v. At eſt pro priore meridie coſ. $v =$ coſ. $56^\circ, 29', 41'' =$ ſin. $33^\circ, 30', 19''$;

pro poſteriore meridie vero coſ. $v =$ coſ. $55^\circ, 31', 7'' =$ ſin. $34^\circ, 28', 53''$.

Pro priore meridie

l coſ. v = 9, 7419500

$l\,k\,a$ = 3, 2271923

2, 9691423

num. = 931.

Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 100931$

et $l\,y$ = 5, 0040203

Pro

Pro altero meridie

l coſ. $v = 9,7529228$

$l\ k\ a = 3,2271923$

$2,9801151$

numerus $= 955$.

Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 100955$

et $l\ y = 5,0041278$

§. 92. Anomalia vera z reperietur ex hac aequatione coſ. $z = \frac{ka\ ſin.\ tot.}{y} + \frac{a\ coſ.\ v}{y}$

Ergo pro priore meridie

$l\ k\ a$ ſin. tot. $= 13,2271923$

$l\ y = 5,0040203$

$8,2231720$

num. $= 167175$

l coſ. $v = 9,7419500$

$l\ a = 5,0000000$

$14,7419500$

$l\ y = 5,0040203$

$9,7379297$

num. $= 5469274$

167175

coſ. $z = 5636449 =$ ſin- $34°, 18', 29''$

Ergo $z = 10$ S, $4°, 18', 29''$

addatur $p = 8$ S, $8, 25, 42$

longitudo terrae $= 6$ S, $12°, 44', 11''$ a prima ſtella arietis, hinc longitudo ſolis $= 0$ S, $12°, 44', 11''$ vera

ob

ob lucis propogationem ſubtr. 20″ hinc
longitudo ſolis apparens $= 0\,S, 12°, 43', 51''$

Pro meridie ſequente.

$$
\begin{aligned}
lka\ \text{ſin. tot.} &= 13,\ 2271923 \\
ly &= 5,\ 0041278 \\
\hline
 & \ 8,\ 2230645 \\
\text{numerus} &= 167134
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l\,\text{coſ.}\ v &= 9,7529228 \\
l\tfrac{y}{a} &= 0,0041278 \\
\hline
 & \ 9,7487950 \\
\text{num:} &= 5607833 \\
 & \ \ 167134 \\
\hline
\text{coſ.}\ z &= 5774967 = \text{ſin.}\ 35°,\ 16',\ 29''
\end{aligned}
$$

Ergo z	$= 10\,S,$	$5°,$	$16',$	$29''$
addatur p	$= 8,$	$8,$	$25,$	42
longitudo terrae $=$	$6\,S,$	$13°,$	$42',$	$11''$

hinc longitudo ſolis $= 0\,S, 13°, 42', 11''$ vera
ob lucis propagationem ſubtr. 20″

longitudo ſolis $= 0\,S, 13°, 41', 51''$ apparens

§. 93. Definitis locis ſolis progrediamur ad mercurii loca inueſtiganda, ac primo quidem anomaliae mediae ita prodibunt ex tabulis correctis.

A. 1721	8 S, 16° 34′, 20″	
19	10 , 16′, 42 , 21	
April.	0, 8, 18 , 36	
	7 S, 11°, 35′, 17″	
d. 22	3, 0, 14 , 53	
	10 S , 11 , 50′, 10″	Anom. media
d. 23	3, 4, 7′, 25	
	10 S , 15 , 42 , 42	Anom. media

Pro priore meridie erit ergo $x = 10\,S, 11°, 50', 10''$
et ſin. $x = -$ ſin. $48°, 9', 50''$
pro ſequente vero meridie $x = 10\,S, 15°, 42', 42''$
et ſin. $x = -$ ſin. $44°, 17', 18''$
Hinc reperietur anomalia excentri ſequenti modo pro priore meridie.

$l -$ ſin. $x = 9,8721888$
ſubtr. $5,3643411$

$4,5078477$

num : $= 32199'' = 8°, 56', 39''$
$x = 10\,S, 11°, 50', 10''$

$10\,S, 20°, 46', 49''$
ab $12\,S$

$39°, 13', 11''$
$-$ ſin. $= 9,8009204$
$5,3643411$

$4,4365793$

num :

num. = 27326″ = 7°, 35′, 26″
x = 10 S, 11, 50, 10

10 S, 19°, 25′, 36″
ab 12 S

40°, 34′, 24″
l – ſin. = 9, 8131944
5, 3643411

4, 4488533
num. = 28110″ = 7°, 48′, 30″
x = 10 S, 11, 50, 10

10 S, 19°, 38′, 40″
ab 12 S

40°, 21′, 20″
l – ſin. = 9, 8112592
5, 3643411

4, 4469181
num. = 27984″ = 7°, 46′, 24″
x = 10 S 11, 50, 10

10 S, 19°, 36′, 34″
ab 12

40°, 23′, 26″
l - ſin. = 9, 8115712
5, 3643411

4, 4472301

num.

num. = 28005″ = 7°, 46′, 45″

x = 10 *S*, 11, 50, 10

10 S, 19°, 36′, 55″

ab 12 *S*

40°, 23′, 5″

l – ſin. = 9, 8115193

5, 3643411

4, 4471782

num: = 28001″ = 7°, 46′, 41″

x = 10 S, 11, 50, 10

10 S, 19, 36, 51″

ab 12 S

40°, 23′, 9″

l – ſin. = 9, 8115288

5, 3643411

4, 4471877

num: = 28002″ = 7°, 46′, 42″

x = 10S, 11, 50, 10

v = 10S, 19°, 36′, 52″ anomalia excentri

Pro ſequente meridie

aſſumatur prior differentia 7°, 46′, 42″

x = 10S, 15, 42, 42

10S, 23°, 29′, 24″

ab 12S

36°, 30′, 36″

l – ſin.

$l -$ ſin. $= 9,7744899$
$5,3643411$
$4,4101488$
num. $25712'' = 7°, 8', 32''$
$x = 10S, 15, 42, 42$
$10S, 22°, 51', 14''$
ab $12S$
$37°, 8', 46''$
$l -$ ſin. $= 9,7806760$
$5,3643411$
$4,4163349$
num. $= 26081'' = 7°, 14', 41''$
$x = 10S, 15, 42, 42$
$10S, 22, 57, 23''$
ab $12S$
$37° 2' 37''$
$-$ ſin. $= 9,7799013$
$5,3643411$
$4,4155602$
num. $= 26035'' = 7°, 13', 55''$
$x = 10S, 15, 42, 42$
$10S, 22°, 56', 37''$
ab $12S$
$37°, 3', 23''$
$l -$ ſin. $= 9,7800296$
$5,3643411$
$4,4156885$

num. = 26043″ = 7°, 14′, 3″
x = 10S, 15, 42, 42

10S, 22°, 56′, 45″
ab 12S

37°, 3′, 15″
l — ſin. = 9, 7800073
5, 3643411

4, 4156662
num. = 26042″ = 7°, 14′, 2″
x = 10S, 15, 42, 42

v = 10S, 22°, 56′, 44″ anomalia excentri

§. 94. Ex anomalia excentri reperietur primo diſtantia mercurii a ſole $y = a + ka$ coſ. v

Pro priore meridie

coſ. v = ſin. 49°, 36′, 52″
la = 4, 5878232
lk = (—1), 3212338

lka = 3, 9090570
l coſ. v = 9, 8817849

3, 7908419
ka coſ. v = 6178
a = 38710

y = 44888 diſtantia Mercurii a ſole
ly = 4, 6521303

Pro ſequente meridie

coſ. v = ſin. 52°, 56′, 44″
lka = 3, 9090570

l coſ.

$l\,\text{coſ.}\,v = 9,9020390$

$3,8110960$

$ka\,\text{coſ.}\,v = 6472$

$a = 38710$

$y = 45182$ diſtantia Mercurii a ſole

$ly = 4,6549654$

§. 95. Nunc reperietur anomalia vera z ex hac aequatione $\text{coſ.}\,z = \frac{ka\,\text{ſin. tot.}}{y} + \frac{a\,\text{coſ.}\,v}{y}$

Pro priore meridie

$lka\,\text{ſin. tot.} = 13,9090570$

$ly = 4,6521303$

$9,2569267$

$\frac{ka\,\text{ſin. tot.}}{y} = 1806869$

$la = 4,5878232$

$l\,\text{coſ.}\,v = 9,8817849$

$14,4696081$

$ly = 4,6521303$

$9,8174778$

$\frac{a\,\text{coſ.}\,v}{y} = 6568676$

1806869

$\text{coſ.}\,z = 8375545 = \text{ſin.}\ 56^\circ, 52', 57''$

Ergo $z = 10S, 26^\circ, 52', 57''$ anomalia vera

Pro ſequente meridie

$lka\,\text{ſin. tot.} = 13,9090570$

$ly = 4,6549654$

$9,2540916$

$\frac{ka\,\text{ſin. tot.}}{y} = 1795113$

 $la =$

$l\,a = \quad 4,5878232$
$l\,\text{coſ.}\,v. = 9,9020390$

$14,4898622$
$l\,y = \quad 4,6549654$

$9,8348968$
$\frac{a\,\text{coſ}\,v}{y} = \quad 6837492$
1795113

$\text{coſ.}\,z = \quad 8632605 = \text{ſin.}\,59^\circ, 41', 5''$
Ergo $z = 10\,S, 29^\circ, 41', 5''$ Anomalia vera.

§. 96. Antequam vlterius progrediamur, neceſſe eſt vt in diſtantiam aphelii a nodo aſcendente inquiramus, quae poſita eſt $= e$, et ex hac aequatione inuenitur.
$\text{tang.}\,e = \frac{\text{tang.}\,(p-q)}{\text{coſ.}\,n}$
Eſt vero $p = 7S, 16^\circ, 41', 37''$
$q = 0S, 15^\circ, 39', 43''$

$p-q = 7S, 1^\circ, 1', 54''$
$n = 6^\circ, 54', 19''$
$\text{tang.}\,(p-q) = \text{tang.}\,31^\circ, 1', 54''$
$l\,\text{tang.}\,(p-q) = 9,7793173$
$l\,\text{coſ.}\,n = \quad 9,9968382$

$l\,\text{tang.}\,e = \quad 9,7824791 = l\,\text{tang.}\,31^\circ, 12', 58''$
Ergo $e = 7S, 1^\circ, 12', 58''$
Hicque valor eſt conſtans, et pro omni tempore idem manet.

§. 97. Sequitur iam determinanda longitudo mercurii a nodo aſcendente r per hanc aequationem:
$\text{tang.}\,r = \text{coſ.}\,n\ \text{tang.}\,(e+z)$

Pro-

Pro priore meridie

$e = 7S,\ 1^\circ,\ 12',\ 58''$

$z = 10S,\ 26^\circ,\ 52',\ 57''$

$e+z = 5S,\ 28^\circ,\ 5',\ 55''$

$\text{tang.}\ (e+z) = -\text{tang.}\ 1^\circ,\ 54',\ 5''$

$l - \text{tang.}\ (e+z) = 8,5211068$

$l\ \text{coſ.}\ n = 9,9968382$

$l - \text{tang.}\ r = 8,5179450 = l\ \text{tang.}\ 1^\circ, 53', 15''$

Ergo $r = 5S,\ 28^\circ,\ 6',\ 45''$

Pro ſequente meridie

$e = 7S,\ 1^\circ,\ 12',\ 58''$

$z = 10S,\ 29^\circ,\ 41',\ 5''$

$e+z = 6S,\ 0^\circ,\ 54',\ 3''$

$l\ \text{tang.}\ (e+z) = 8,1965556$

$l\ \text{coſ.}\ n = 9,9968382$

$l\ \text{tang.}\ r = 8,1933938 = l\ \text{tang.}\ 0^\circ,\ 53',\ 39''$

Ergo $r = 6S,\ 0^\circ,\ 53',\ 39''$

§. 98. Quod ſi ad longitudinem mercurii a nodo r addatur longitudo nodi a prima ſtella arietis q, obtinebitur mercurii longitudo heliocentrica a prima ſtella arietis.

Pro primo meridie

$q = 0S,\ 15^\circ,\ 39',\ 43''$

$r = 5S,\ 28^\circ,\ 6',\ 45''$

longitudo $= 6S,\ 13^\circ,\ 46',\ 28''$ mercurii helioeentrica.

Pro altero meridie

$q = 0S,\ 15^\circ,\ 39',\ 43''$

$r = 6S,\ 0^\circ,\ 53',\ 39''$

longitudo $= 6S,\ 16^\circ,\ 33',\ 22''$ mercurii heliocentrica.

Latitudo autem heliocentrica ad boream reſpiciens s inuenietur ex hac aequatione ſin $s =$ ſin. n ſin $(e+z)$ Quare erit

Pro meridie priore.

$$\text{ſin } (e+z) = \text{ſin. } 1^\circ, 54', 5''$$
$$l\,\text{ſin. } (e+z) = 8,5208680$$
$$l\,\text{ſin. } n = 9,0800068$$

$$l\,\text{ſin. } s = 7,6008748 = l\,\text{ſin. } 0^\circ, 13', 43''$$

Ergo $s = 0^\circ, 13', 43''$ latitudo heliocentrica.

Pro meridie ſequente.

$$\text{ſin. } (e+z) = -\text{ ſin. } 0^\circ, 54', 3''$$
$$l - \text{ſin. } (e+z) = 8,1965020$$
$$l\,\text{ſin. } n = 9,0800068$$

$$l - \text{ſin. } s = 7,2765088 = l\,\text{ſin. } 0^\circ, 6', 30''$$

Ergo $s = -0^\circ, 6', 30''$, latitudo heliocentrica auſtralis.

§. 99. Inuentis mercurii locis heliocentricis, pergo ad eius loca geocentrica definienda. Ac primo quidem pro meridie priore erit

Diſtantia terrae a ſole $c = 100931$

et $lc = 5,0040203$

longitudo terrae $u = 6S, 12^\circ, 44', 11''$

Nunc angulus quaeratur p T V $= t$, ex aequatione

$$\text{cot. } t = \text{cot. } (u-q-r) - \frac{c}{y \text{ coſ. } s \text{ ſin. } (u-q-r)}$$

cum autem ſit $u = 6S, 12^\circ, 44', 11''$

ſubtrahatur $q+r = 6S, 13^\circ, 46', 28''$

erit $u-q-r = 11S, 28^\circ, 57', 43''$

tang. $(u-q-r) = -$ tang. $1^\circ, 2', 17''$

ſin.

ſin. $(u-q-r)$ = − ſin. 1°, 2′, 17″
cot. $(u-q-r)$ = − 551919660
lc = 5, 0040203
ly = 4, 6521303

30, 3518900
l coſ. s = 9, 9999965

20, 3518935
l ſin. $(u-q-r)$ = 8, 2580776

12, 0938159
$-\frac{c}{y \text{ coſ. } s \text{ ſin. } (u-q-r)}$ = 1241126000
− 551919660

cot. t − 689206340 = tang. 89°, 10′, 7″
Ergo t = 6 S, 0°, 49′, 53″

Pro ſequente meridie

Diſtantia terrae a ſole c = 100955
et lc = 5, 0041278
Longitudo terrae u = 6 S, 13°, 42′, 11″
ſubtr. $q+r$ = 6 S, 16°, 33′, 22″

$u-q-r$ = 11 S, 27°, 8′, 49″
cot. $(u-q-r)$ = − tang. 87°, 8′, 49″
ſin. $(u-q-r)$ = − ſin. 2°, 51′, 11″
cot. $(u-q-r)$ = − 200657567

lc = 5, 0041278
ly = 4, 6549654

30, 3491624

coſ.

l coſ. $s = 9,9999992$

$20,3491632$

l-ſin.$(u-q-r)$ $8,6970069$

$11,6521563$

$-\frac{c}{y\ coſ.s\ ſin.(u-q-r)} = -448907000$

-200657567

cot. $t = 248249433 =$ tang. $87°, 41', 35''$

Ergo $t = 6$ S, $2°, 18', 25''$

§. 100. Ex his reperitur longitudo mercurii geocentrica $= u - t$. Quare erit

Pro priori meridie

$u = 6$S, $12°, 44', 11''$

$t = 6$S, $0°, 49', 53''$

u-$t = 0$S, $11°, 54', 18''$ quae eſt longitudo mercurii geocentrica a prima ſtella arietis.

Pro ſequenti meridie

$u = 6$ S, $13°, 42', 11''$

$t = 6$ S, $2°, 18', 25''$

$u - t = 0$ S, $11°, 23, 46''$ quae eſt longitudo mercurii geocentrica.

Latitudo autem geocentrica g, orietur ex hac aequatione tang. $g = \frac{ſin.\ t.tang.\ s}{ſin.\ (u-q-r)}$

Ergo pro priori meridie

l – ſin. $t = 8,1616658$

l tang. $s = 7,6008779$

$15,7625437$

l—

l - ſin. $(u - q - r) = 8,2580776$

l tang. $g = 7,4044061 = l$ tang. $0°, 8', 44''$.

Ergo latitudo geocentrica $= 0° \; 8', 44''$ Borealis

pro altero meridie

l - ſin. $t = 8,6047970$

l - tang. $s = 7,2765095$

$15,8813065$

l - ſin. $(u - q \cdot r) = 8,6970069$

l - tang. $g = 7,1842996 = l$ - tang. $0°, 5', 15''$

Ergo latitudo geocentrica $= 0°, 5', 15''$ Auſtralis.

§. 101. Longitudines iſtae inuentae geocentricae ſunt verae, in quibus mercurius conſpiceretur, ſi lumen in inſtanti propagaretur: quamobrem eae ad longitudines apparentes per ſequentem aequationem reducentur.

Pro primo meridie

longitudo ☿ geocentrica $= 0S, 11°, 54', 18''$

longitudo ☿ heliocentrica $= 6S, 13°, 46', 28''$

$6S, \; 1°, 52', 10''$

l - coſ. $1°, 52' = l - q = 9,9997720$

$l \frac{c}{s} = 3,8140656$

$6,1857064$

$4,6855749$

$1,5001315$

Ergo $\frac{s}{c} q = - 32''$

longitudo ☿ geocentrica = 0 S, 11°, 54′, 18″
longitudo terrae 6 S, 12°, 44′, 11″

6 S, 0°, 49′, 53

l - coſ. 0°, 50′ = $l - m$ = 9, 9999541
$l\frac{c}{r}$ = 4, 0201540

5, 9798001
4, 6855749

1, 2942252

Ergo $-\frac{r}{c}m = 20''$
$+\frac{s}{c}q = -32''$

Aequatio = − 12″

quae 12″ a longitudine obſeruata ſubtrahi deberent; et hanc obrem ad longitudinem veram mercurii addi debebunt. Quocirca priori meridie fuit apparens mercurii longitudo = 0 S, 11°, 54′, 30″.

Pro ſequente meridie

longitudo ☿ geocentrica = 0 S, 11°, 23′, 46″
longitudo ☿ heliocentrica = 6 S, 16°, 33′, 22″

Differentia = 6 S, 5°, 9′, 36″

l coſ. diff. = $l - q$ = 9, 9982433
$l\frac{c}{s}$ = 3, 8140656

6, 1841777
4, 6855749

1, 4986028

$\frac{s}{r}q = -31'', 5$

longi-

longitudo ☿ geocentrica $= 0\,S, 11°, 23', 46''$
longitudo terrae $= 6\,S, 13°, 42', 11''$

Diff. $6\,S,\ 2°, 18', 25''$

l coſ. diff $= l - m = 9,9996500$

$l \frac{c}{r} = 4,0201540$

$5,9794960$

$4,6855749$

$1,2939211$

Ergo $- \frac{r}{c}\, m = + 19'' 6$

$+ \frac{s}{c}\, q = - 31'', 5$

Aequatio $= - 12''$

Longitudo ergo geocentrica inuenta augeri debebit 12'', vnde longitudo mercurii apparens pro ſequente meridie prodibit $= 0\,S, 11°, 23', 58''$

§. 102. His inuentis erit ad meridiem diei 21 Aprilis A. 1740 tempore medio ſub meridiano Londinenſi, vt ſequitur.

Longitudo ſolis apparens $0\,S, 12°, 43', 51''$
Longitudo ☿ geocentrica $0\,S, 11°, 54', 30''$
Latitudo mercurii geocentrica $0°, 8', 44''$ Borealis.
At ad meridiem diei ſequentis, qui eſt 22 Aprilis tempore medio ſub meridiano Londinenſi pariter erit
Longitudo ſolis apparens $0\,S, 13°, 41', 51''$
Longitudo ☿ geocentrica $0\,S, 11°, 23', 58''$
Latitudo ☿ geocentrica $0°, 5', 15''$ auſtralis.

Vt inueniatur tempus coniunctionis ☉ et ☿, quo longitudines vtriusque fient aequales, apparet primum coniunctionem ante meridiem diei 21 Aprilis contingere debere.

Namque exceſſus longitudinis ſolis ſuper longitudinem mercurii illo meridie eſt 49′, 21″, ſequenti vero meridie eſt exceſſus 2°, 17′, 83″. Tempore ergo 24 horarum mercurius a ſole ſecundum longitudinem recedit per 1°, 28′, 32. Hinc inueniri poterit tempus ante meridiem diei 21 Aprilis, quo ☿ a ſole per ſpatium 49′, 21″ iam receſſit per regulam auream

$$1°, 28', 32'' : 24^h = 49', 21'' : 13^h, 22'$$

ſub meridiano Londinenſi ergo coniunctio ☿ cum ſole continget Aprilis die 20 : 10^h, 38′ ideoque nocte cum ſol iam occidit, ex quo haec coniunctio Londini non erit conſpicua. Hic autem Petropoli haec coniunctio incidet in diem 21 Aprilis mane 0^h. 58′, hoc eſt mox poſt mediam noctem, tempore ciuili. Verum Obdorae, quo Cel. De l' Isle Noſter huius coniunctionis cauſa eſt profectus, haec coniunctio incidet in eundem diem 21 Aprilis ſecundum tempus ciuile mane 3^h, 18′ quo tempore iſto loco ſol iam ſupra horizontem verſatur: ita vt iſta coniunctio Obdorae conſpicua eſſe debeat.

§. 103. Videamus iam, an in hac coniunctione ☿ vere in diſcum ſolis intret, et quousque ſe in ſolem immergere debeat. Ex locis computatis autem patet, latitudinis mutationem tempore 24 horarum eſſe 13′, 59″, vnde tempore 13^h. 22′ mutatio latitudinis erit 7′, 47″. Tempore igitur coniunctionis mercurii et ſolis, latitudo mercurii erit 16′, 31″; vix igitur ac ne vix quidem mercurius ſolis diſcum attinget, quia latitudo mercurii minor non eſt, quam ſemidiameter ſolis apparens. Hoc autem intelligendum, quando ſpectator in centro terrae verſaretur: quod ſi is autem in loco boreali conſtituatur, vbi hoc

tem-

tempore ſolem prope horizontem cernit, propter parallaxin latitudo mercurii aliquantulum minor ipſi apparebit, atque differentia exſurget prope ad 8″. Quamobrem Obdorae, vbi haec coniunctio, ſole horizontem tenente, contingit, latitudo mercurii apparebit 16′, 23″. vnde ſi diameter ſolis apparens maior fuerit 32′, 46″, mercurius per ſolis diſcum tranſire conſpicietur. Tabulae autem Aſtronomicae apparentem diametrum ſolis hoc tempore maiorem non oſtendunt quam 32′, ex quo concludendum eſt mercurium in hac coniunctione extra limbum ſolis verſari debere. Scilicet momento coniunctionis, quo mercurius et centrum ſolis eandem tenent longitudinem; poſt coniunctionem autem, quia latitudo mercurii decreſcit ſingulis horis 35″; vna hora poſt coniunctionem latitudo mercurii erit 15′, 48″; atque tum mercurius ſecundum longitudinem a centro ſolis diſtabit 3′, 41″, in qua diſtantia ſolis latitudo adhuc maior quam 15′, 34″. Quod ſi autem inueſtigemus, quam prope poſt coniunctionem mercurius ad centrum ſolis accedat, inueniemus minimam diſtantiam eſſe 16′, 11″, idque Obdorae, vbi ſol prope horizontem hoc tempore ſpectatur, atque per parallaxin latitudo mercurii apparens diminuitur, quae diſtantia cum adhuc maior ſit, quam ſemidiameter ſolis apparens, ſequitur omnino ſecundum iſtas tabulas correctas, quibus ſumus vſus, mercurium per diſcum ſolis non eſſe tranſiturum.

DETERMINATIO EXACTIOR
GRADVVM PARALLELORVM
AEQVATORIS et MERIDIANI
in figura Telluris hypothetice ſphaerica, *aut (prouti per recentiſſimam dimenſionem ſtabilitur)* ſphaeroide.

AVCTORE
C. N. de WINSHEIM.

Geographorum molimina, circa figuram Telluris determinandam, vsque ad *Riccioli* tempora, qui ipſe huic operi inuigilauit, ex ipſius *Geographia Reformata* abunde conſtant; Recentiorum vero conatus, e praeclaris eorum de demenſione telluris operibus editis, vberius perſpiciuntur.

Plerique eorum, dum dimenſionem terrae aggreſſi ſunt, eam figuram habere *ſphaericam*, tacite ſuppoſuerunt; hinc quoque ex arcu quodam meridiani cuiusdam, aut circuli maximi menſurato, magnitudinem totius globi terraquei, eiusque proin diametrum, peripheriam, ſuperficiem et ſoliditatem, determinare allaborarunt.

Et quamuis in diuerſas abierint ſententias Eruditorum nonnulli, *Hugenio* et *Newtono* terram *ſphaeroidem* eſſe, cuius diameter, axem data ratione ſuperet. *Caſſinis* vero patre et filio diametrum ab axe ſuperari affirmantibus; non deſuere tamen magni nominis Viri qui Illuſtriſſimorum Academiae noſtrae Membrorum, Marchionis *Poleni* et *Wolfii* ſententiam amplectentes, terram nihilominus pro *ſphaerica* reputari, ſeque in dimenſione a *Piccardo* in Gallia, ſeculo proxime elapſo inſtituto, acquieſcere poſſe autum-

tumarunt. His perpenſis, me rem haud inutilem ac ingratam facturum ratus, tabulam ſingulorum parallelorum, per partes aequatoris expreſſorum, denuo ad calculum reuocaui, et a variis, quibus diuerſi Geographorum libri ſcatent, mendis purgaui. Adieci e regione quantitatem gradus paralleli, per hexapedas Gallicas, de nouo ad ductum praecedentis tabulae ſupputatas, vt et per pedes expreſſam Londinenſes; quoniam ratio harum menſurarum, ceteris notior erat, et maiori cum cura haud ita pridem in Academia noſtra determinata, vt facile cum Menſura hoc in Imperio vſitata comparari poſſit.

vid. Tab. A.

Eundem porro quem in priori columna Tabulae A. dedi, hic denuo ſiſto laterculum, cui, prouti titulus frontis innuit, non ſolum partes temporis partibus aequatoris reſpondentes iunxi, ſed etiam vlterius, gradum aequatoris cum gradibus parallelorum comparando, quis ille in horum vnoquoque valeat, per partes circuli aeque ac temporis, exprimere volui; hos ſiquidem laterculos, calculi Aſtronomici et Geographici moleſtiam certis in analogiis inſtituendis, quodammodo minuere poſſe confido.

vid. Tab. B.

Anno tandem proxime elapſo, ad manus noſtras peruenit, liber Celeberrimi Academiae noſtrae Sodalis *de Maupertuis*, qui Figuram Telluris, vna cum laborum Sociis eruditis, in *Lapponia* aeque ac *Gallia*, maioribus ad id vſus, magisque exacte elaboratis inſtrumentis Aſtronomicis, quam praecedentia quidem viderant ſecula, determinare aggreſſus erat. Hoc

Hoc libro lecto, cupido animum inceſſit, parallelorum gradus in *Figura Telluris Sphaeroide*, inibi ſtabilita ſupputandi, illisque gradus meridiani iungendi, qui quidem ex comparatione gradus ſub circulo polari menſurati, cum gradu ſub Parallelo 49° a *Piccardo* iam ante menſurato, nunc autem curatius determinato, deducendi erant.

Communicauit mecum, hunc in finem benigniſſime methodum ſuam, Celeberrimus *Eulerus*, mire facilem et compendioſam, quam ipſiſſimis Viri Celeberrimi Verbis, bona cum eius venia, praemitto; quoniam ea mediante, quae mox exhibebuntur, confectae ſunt Tabulae C. et D.

METHODVS

VIRI CELEBERRIMI LEONH. EVLERI

Determinandi gradus Meridiani pariter ac Paralleli Telluris ſecundum Menſuram a CELEB. *de Maupertuis* cum ſociis inſtitutam.

Ex duobus gradibus Meridiani exacte menſuratis, quorum alter ſub ipſo circulo polari compertus eſt 57438 hexap. Paris. alter ſub eleuatione Poli 49° 57183 hexap. Figura et magnitudo terrae ita determinatur, vt ſit:

Semiaxis terrae = 3263626 hexap.

Semid. aequatoris = 3281570 hexap.

Hincque axis terrae ad diametrum aequatoris rationem teneat proxime vti

182 ad 183.

Ex

Ex his datis regulae poterunt tradi, tam ad ſingulos Meridianorum gradus, quam ad gradus Parallelorum definiendos.

Problema. I.

Sub data Eleuatione Poli definire quantitatem vnius gradus in Meridiano.

Solutio.

Bini caſus ſunt reſpiciendi, prior, ſi Eleuatio Poli *maior* ſit, quam 45°, poſterior, ſi *minor* ſit quam 45°. Vtroque caſu Eleuatio Poli bis ſumatur, ac *priori* caſu exceſſus ſupra 90°, poſteriori defectus infra 90°. notetur; atque ſiue exceſſus ſiue defectus capiatur Logarithmus ſinus, ad eumque perpetuo addatur iſte Logarithmus

2, 6718815

atque a ſumma ſubtrahatur Logarithmus ſinus totius

10 0000000

Logarithmi reſidui quaeratur numerus reſpondens.
Iſte numerus hoc modo inuentus, priori caſu, quo Elevatio Poli maior eſt, quam 45°, addatur ad 57117, 6 hexap. poſteriori caſu autem, quo Eleuatio Poli minor erat, quam 45° ſubtrahatur a 57117, 6 et numerus reſultans dabit magnitudinem gradus Meridiani in hexapedis Pariſinis. Q. E. I.

Exemplum. 1.

Quaeratur gradus Meridiani ſub ipſo Aequatore

Eleuatio Poli ergo eſt		0°
duplum eius - - -		0°
auferatur a - - -		90°
remanet - - - -		90°
Log. ſin. 90°	=	10, 0000000
addatur		2, 6718815
Subtrahatur Log. ſin. tot.		/2, 6718815
Numerus reſpondens		469, 7
ſubtrahatur ab		57117, 6

Gradus Meridiani = 56648 hexap. Pariſ. circa Aequatorem.

Exempl. 2.

Quaeratur Meridiani gradus ſub ipſo Polo.

Eleuatio Poli eſt		90°
eius duplum		180°
ab eo ſubtrahatur		90°
remanet	—	90°
Log. ſin. 90°	=	10, 0000000
addatur		2, 6718815
ſubtrah. Log. ſin. tot.		/2, 6718815
Num. reſpond.		469, 7
addatur ad		57117, 6

Gradus Meridiani = 57587 hexap. Pariſ. ſub ipſo Polo.

Exempl. 3.

Quaeratur Meridiani Gradus ſub Eleuatione Poli 49°

Ele-

Eleuatio Poli eſt	49°
eius duplum	98°
ab eo ſubtrahantur	90°
remanent	8°
Logar. ſin. 8° =	9,1435553
addatur - - -	2,6718815
ſubtrah. Log. ſin. tot.	~~1~~1,8154368
Numer. reſpond.	65,3
addatur ad	57117,6

Gradus Merid. = 57183 hexap. Pariſ. in latit. 49°

Exempl. 4.

Quaeratur Gradus Meridiani ſub circulo Polari

Eleuatio Poli eſt	66° 30′
eius duplum	133°
auferantur	90°
remanet	43°
Logar. ſin. 43° =	9,8337833
addatur	2,6718815
	~~1~~2,5056648
Num. reſpond.	320,4
addatur	57117,6

Gradus Merid. = 57438, hexap. Pariſ. ſub circulo Polari.

Exemplum 5.

Quaeratur gradus Meridiani ad Latitudinem 60°

Eleuatio Poli eſt	60°
eius duplum	120°
auferantur	90°
remanet	30°
Log. ſin. 30° =	9,6989700
addatur	2,6718815
	12,3708515
Numerus reſpond.	234,8
addatur ad	57117,6

Gradus Merid. = 57352, Hexap. Pariſ. ſub Eleuatione Poli 60°

Problema II.

Ad datam Eleuationem Poli inuenire Gradum vnum in Parallelo.

Solutio.

Primo ſumatur Logarithmus Coſinus Eleuationis Poli, ad eumque conſtanter addatur hic Logarithmus

4,7591447

a ſumma auferatur Logarithmus ſinus totius, et Logarithmi reſidui quaeratur numerus reſpondens.

Secundo duplicetur Eleuatio Poli atque vel a duplo ſubtrahantur 90° vel ipſum duplum a 90° gradibus auferatur, prout Eleuatio Poli fuerit vel maior quam 45° vel minor.

nor. Vtroque dein caſu capiatur Logarithmus ſinus reſidui, ad eumque addatur Logarithmus Coſinus Eleuationis Poli, inſuperque perpetuo addatur 2, 1947602 et a ſumma ſubtrahatur Logarithmus ſinus totius bis ſumtus nempe

2, 0000000

Logarithmi reſidui quaeratur numerus reſpondens, hicque priori caſu, quo Eleuatio Poli maior eſt 45° addatur ad numerum ſupra inuentum, altero caſu quo Eleuatio Poli minor eſt quam 45° ſubtrahatur a numero ſupra inuento, ſicque prodibit magnitudo Gradus in Parallelo propoſito. Q. E. I.

Exempl. I.

Quaeratur magnitudo vnius Gradus in ipſo Aequatore

Eleuatio Poli ergo eſt 0°

Logar. coſ. 0°	=	10, 0000000
addatur		4, 7591447
		~~1~~4, 7591447
Num. reſpond.	=	57430, 8
duplum Eleuationis Poli		0°
ſubtr. a		90°
remanet		90°
Log. ſin. 90°	=	10, 0000000
Log. coſ. 0°	=	10, 0000000
addatur		2, 1947602
ſubtrah. 2 log. ſin. tot.		~~2~~2, 1947602

 Num.

Num. reſp. 156, 6
ſubtrahatur ab 57430, 8

Gradus Aequat. = 57274 Hex. Pariſ.

Exempl. 2.

Quaeritur magnitudo vnius gradus in parallelo latitudinis 60°

Eleuatio poli eſt 60°
Log. coſ. 60° = 9, 6989700
addatur 4, 7591447

14, 4581147

Num. reſpond. 28715, 4
Duplum Eleu. Poli eſt 120°
auferantur 90

remanet 30°
Log. ſin. 30° = 9, 6989700
Log coſ. 60° = 9, 6989700
addatur 2, 1947602

ſubtr. 2. Log. ſin. tot. 21, 5927002

Num. reſpondens 39, 1
addatur ad 28715, 4

Gradus Parall. = 28754½ Hex. Pariſ. ſub
Eleuatione Poli 60°

Exempl. 3.

Quaeratur ſub Eleuatione Poli 40° magnitudo vnius gradus in parallelo

Eleuatio

Eleuatio Poli eſt	40°	
Log. coſ. 40° =	9, 8842540	
addatur	4, 7591447	
	≠4, 6433987	
Numer. reſpond.	43994, 6	
Eleuatio Poli bis ſumta		80°
auferatur ab		90°
remanet		10°
Log. ſin. 10° =	9, 2396702	
Log. coſ. 40° =	9, 8842540	
addatur	2, 1947602	
	≠1, 3186844	
Numer. reſpond.	20, 8	
ſubtrahatur ab	43994, 6	

Gradus Paralleli = 43974 Hex. Pariſ. ſub Eleuatione Poli 40°

Tab.

Tab. A.

Singuli gradus Parallelorum Aequatoris, per minutias Aequatoris expreſſi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, ſuppoſita figura Telluris Sphaerica, per menſuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
0	60′	0″	0‴	57060	364734
1	59	59	27	57051	364678
2	59	57	48	57025	364511
3	59	55	4	56982	364234
4	59	51	14	56921	363846
5	59	46	18	56843	363346
6	59	40	17	56747	362737
7	59	33	10	56635	362015
8	59	24	58	56505	361185
9	59	15	41	56357	360244
10	59	5	18	56193	359192
11	58	53	51	56012	358032
12	58	41	20	55813	356764
13	58	27	44	55598	355386
14	58	13	4	55365	353900
15	57	57	20	55116	352306
16	57	40	33	54850	350606
17	57	22	42	54567	348797
18	57	3	48	54267	346882
19	56	43	52	53951	344863
20	56	22	54	53619	342739
21	56	0	53	53270	340508
22	55	37	52	52905	338176
23	55	13	49	52524	335739
24	54	48	46	52127	333201
25	54	22	42	51714	330560
26	53	55	39	51285	327820
27	53	27	37	50841	324980
28	52	58	37	50381	322042
29	52	28	38	49906	319004
30	51	57	41	49415	315868

Singu-

Singuli gradus Parallelorum Aequatoris per minutias Aequatoris expreſſi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, ſuppoſita Figura Telluris Sphaerica, per Menſuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus Latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
31	51′	25″	48‴	48910	312638
32	50	52	58	48389	309311
33	50	19	13	47854	305892
34	49	44	32	47305	302378
35	49	8	58	46741	298774
36	48	32	28	46163	295077
37	47	55	5	45571	291289
38	47	16	50	44964	287414
39	46	37	44	44344	283452
40	45	57	46	43711	279403
41	45	16	57	43064	275268
42	44	35	19	42404	271050
43	43	52	52	41731	266749
44	43	9	37	41045	262367
45	42	25	35	40347	257906
46	41	40	46	39637	253365
47	40	55	12	38915	248749
48	40	8	52	38180	244054
49	39	21	49	37435	239287
50	38	34	2	36677	234446
51	37	45	33	35909	229534
52	36	56	23	35130	224553
53	36	6	32	34340	219502
54	35	16	2	33539	214386
55	34	24	53	32728	209204
56	33	33	6	31908	2039[illegible]7
57	32	40	42	31077	19864[illegible]
58	31	47	43	30237	193280
59	30	54	8	29388	18[illegible]852
60	30	0	0	28530	182367

Singuli Gradus Parallelorum Aequatoris per Minutias Aequatoris expreſſi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, ſuppoſita Figura Telluris Sphaerica, per Menſuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus Latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
61	29′	5″	19‴	27663	176827
62	28	10	6	26788	171232
63	27	14	22	25905	165586
64	26	18	8	25013	159889
65	25	21	26	24115	154144
66	24	24	15	23208	148350
67	23	26	38	22295	142513
68	22	28	35	21375	136632
69	21	30	7	20448	130708
70	20	31	16	19516	124746
71	19	32	3	18577	118746
72	18	32	28	17633	112710
73	17	32	32	16683	106637
74	16	32	18	15728	100535
75	15	31	45	14768	94400
76	14	30	55	13804	88237
77	13	29	49	12836	82047
78	12	28	29	11863	75833
79	11	26	55	10888	69595
80	10	25	8	9908	63335
81	9	23	10	8926	57057
82	8	21	1	7941	50760
83	7	18	44	6954	44450
84	6	16	18	5964	38125
85	5	13	46	4973	31789
86	4	11	7	3980	25442
87	3	8	25	2986	19089
88	2	5	38	1991	12729
89	1	2	50	996	6366
90	0	0	0	000	0000

Tab-

Tab. B.

Tabula Quadripartita

Partim ſingulos Gradus Parallelorum per Minutias Aequatoris pariter ac Temporis exhibens, Partim Gradum Aequatoris per Gradus Parallelorum et Minutias Temporis reſpondentes exprimens.

Decl. ſ. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequiualentes vni Gradui Paralleli			Minutiae Temporis Minutiis Aequatoris reſpondentes.				Decl. ſ. Latitudo Parall.	Grad. Aequatoris per Gr. Min. etc. ſingulorum Parall. expreſſus				Minutiae Temporis Partibus Circuli reſpondentes.			
	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.		°	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.
1	59	59	27	3	59	57	48	1	1	0	0	33	4	0	2	12
2	59	57	48	3	59	51	12	2	1	0	2	12	4	0	8	48
3	59	55	4	3	59	40	16	3	1	0	4	56	4	0	19	44
4	59	51	14	3	59	24	56	4	1	0	8	47	4	0	35	8
5	59	46	18	3	59	5	12	5	1	0	13	45	4	0	55	0
6	59	40	17	3	58	41	8	6	1	0	19	50	4	1	19	20
7	59	33	10	3	58	12	40	7	1	0	27	2	4	1	48	8
8	59	24	58	3	57	39	52	8	1	0	35	23	4	2	21	32
9	59	15	41	3	57	2	44	9	1	0	44	52	4	2	59	28
10	59	5	18	3	56	21	12	10	1	0	55	33	4	3	42	12
11	58	53	51	3	55	35	24	11	1	1	7	23	4	4	29	32
12	58	41	20	3	54	45	20	12	1	1	20	25	4	5	21	40
13	58	27	44	3	53	50	56	13	1	1	34	42	4	6	18	48
14	58	13	4	3	52	52	16	14	1	1	50	12	4	7	20	48
15	57	57	20	3	51	49	20	15	1	2	7	0	4	8	28	0
16	57	40	33	3	50	42	12	16	1	2	25	4	4	9	40	16
17	57	22	42	3	49	30	48	17	1	2	44	29	4	10	57	56
18	57	3	48	3	48	15	12	18	1	3	5	16	4	12	21	4
19	56	43	52	3	46	55	28	19	1	3	27	26	4	13	49	44
20	56	22	54	3	45	31	36	20	1	3	51	2	4	15	24	8
21	56	0	53	3	44	3	32	21	1	4	16	8	4	17	4	32
22	55	37	52	3	42	31	28	22	1	4	42	43	4	18	50	52
23	55	13	49	3	40	55	16	23	1	5	10	54	4	20	43	36
24	54	48	46	3	39	15	4	24	1	5	40	41	4	22	42	44
25	54	22	42	3	37	30	48	25	1	6	12	10	4	24	48	40
26	53	55	39	3	35	42	36	26	1	6	45	23	4	27	1	32
27	53	27	37	3	33	50	28	27	1	7	20	23	4	29	21	32
28	52	58	37	3	31	54	28	28	1	7	57	15	4	31	49	0
29	52	28	38	3	29	54	32	29	1	8	36	4	4	34	24	16
30	51	57	41	3	27	50	44	30	1	9	16	56	4	37	7	44

Decl. ſ. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequiualentes vni Gradui Paralleli			Minutiae Temporis Minutiis Aequatoris reſpondentes.				Decl. ſ. Latitudo Parall.	Gradus Aequatoris per Gr. Min. etc. ſingulorum Parall. expreſſus.				Minutiae Temporis Partibus Circuli reſpondentes.			
	'	"	'''	M.	S.	T.	Q.		°	'	"	'''	M.	S.	T.	Q.
31	51	25	48	3	25	43	12	31	1	9	59	53	4	39	59	32
32	50	52	58	3	23	31	52	32	1	10	45	3	4	43	0	12
33	50	19	13	3	21	16	52	33	1	11	32	30	4	46	10	0
34	49	44	32	3	18	58	8	34	1	12	22	23	4	49	29	32
35	49	8	58	3	16	35	52	35	1	13	14	46	4	52	59	4
36	48	32	28	3	14	9	52	36	1	14	9	50	4	56	39	20
37	47	55	5	3	11	40	20	37	1	15	7	42	5	0	30	48
38	47	16	50	3	9	7	20	38	1	16	8	28	5	4	33	52
39	46	37	44	3	6	30	56	39	1	17	12	19	5	8	49	16
40	45	57	46	3	3	51	4	40	1	18	19	27	5	13	17	48
41	45	16	57	3	1	7	48	41	1	19	30	3	5	18	0	12
42	44	35	19	2	58	21	16	42	1	20	44	17	5	22	57	8
43	43	52	52	2	55	31	28	43	1	22	2	23	5	28	9	32
44	43	9	37	2	52	38	28	44	1	23	24	36	5	33	38	24
45	42	25	35	2	49	42	20	45	1	24	51	10	5	39	24	40
46	41	40	46	2	46	43	4	46	1	26	22	25	5	45	29	40
47	40	55	12	2	43	40	48	47	1	27	58	36	5	51	54	24
48	40	8	52	2	40	35	28	48	1	29	40	7	5	58	40	28
49	39	21	49	2	37	27	16	49	1	31	27	18	6	5	49	12
50	38	34	2	2	34	16	8	50	1	33	20	37	6	13	22	28
51	37	45	33	2	31	2	12	51	1	35	20	28	6	21	21	52
52	36	56	23	2	27	45	32	52	1	37	27	22	6	29	49	28
53	36	6	32	2	24	26	8	53	1	39	41	54	6	38	47	36
54	35	16	2	2	21	4	8	54	1	42	4	40	6	48	18	20
55	34	24	53	2	17	39	32	55	1	44	36	23	6	58	25	32
56	33	33	6	2	14	12	24	56	1	47	17	50	7	9	11	20
57	32	40	42	2	10	42	48	57	1	50	9	53	7	20	39	32
58	31	47	43	2	7	10	52	58	1	53	13	28	7	32	53	52
59	30	54	8	2	3	36	32	59	1	56	29	47	7	45	59	8
60	30	0	0	2	0	0	0	60	2	0	0	0	8	0	0	0
61	29	5	19	1	56	21	16	61	2	3	45	35	8	15	2	20
62	28	10	6	1	52	40	24	62	2	7	48	11	8	31	12	44
63	27	14	22	1	48	57	28	63	2	12	9	40	8	48	38	40
64	26	18	8	1	45	12	32	64	2	16	52	14	9	7	28	56
65	25	21	26	1	41	25	44	65	2	21	58	17	9	27	53	8

Decl. ſ. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequivalentes, uni Gradui Paralleli			Minutiae Temporis Minutiis Aequatoris reſpondentes				Decl. ſ. Latitudo Parall.	Gradus Aequatoris per Gr. Min. etc. ſingulorum Parall. expreſſus				Minutiae Temporis Partibus Circuli reſpondentes				
	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.		°	′	″	‴	H	′	″	‴	⁗
66	24	24	15	1	37	37	0	66	2	27	30	57		9	50	3	48
67	23	26	38	1	33	46	32	67	2	33	33	29		10	14	13	56
68	22	28	35	1	29	54	20	68	2	40	10	5		10	40	40	20
69	21	30	7	1	26	0	28	69	2	47	25	36		11	9	42	24
70	20	31	16	1	22	5	4	70	2	55	25	45		11	41	43	0
71	19	32	8	1	18	8	12	71	3	4	17	33		12	17	10	12
72	18	32	28	1	14	9	52	72	3	14	9	47		12	56	39	8
73	17	32	32	1	10	10	8	73	3	25	13	9		13	40	52	36
74	16	32	18	1	6	9	12	74	3	37	40	34		14	30	42	16
75	15	31	45	1	2	7	0	75	3	51	49	19		15	27	17	16
76	14	30	55	0	58	3	40	76	4	8	0	52		16	32	3	28
77	13	29	49	0	53	59	16	77	4	26	43	37		17	46	54	28
78	12	28	29	0	49	53	56	78	4	48	35	1		19	14	20	4
79	11	26	55	0	45	47	40	79	5	14	27	21		20	57	49	24
80	10	25	8	0	41	40	32	80	5	45	31	35		23	2	6	8
81	9	23	10	0	37	32	40	81	6	23	32	44		25	34	10	56
82	8	21	1	0	33	24	4	82	7	11	7	24		28	44	29	36
83	7	18	44	0	29	14	56	83	8	12	19	35		32	49	18	20
84	6	16	18	0	25	5	12	84	9	34	0	36		38	16	2	24
85	5	13	46	0	20	55	4	85	11	28	24	35		45	53	38	20
86	4	11	7	0	16	44	28	86	14	20	9	29		57	20	37	56
87	3	8	25	0	12	33	40	87	19	6	23	43	1	16	25	34	52
88	2	5	38	0	8	22	32	88	28	39	17	2	1	54	37	8	8
89	1	2	50	0	4	11	20	89	57	17	39	57	3	49	10	39	48
90	0	0	0	0	0	0	0	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. C.

Gradus ſinguli Parallelorum Aequatoris per menſuram Telluris ſub circulo polari et 49° latitudinis Celeber. de Maupertuis determinati, methodo a Celeber. Eulero tradita ſupputati et in Hexapedis Gallicis exhibiti.

G. lat.	Hexa. Dec.	Diff. 1.	Diff. 2.	G. lat.	Hexa. Dec.	Diff. 1.	Diff. 2.
0	57274. 2	7. 5	19. 8	45	40609. 7	711. 2	12. 2
1	57266. 7	27. 0	16. 1	46	39898. 5	723. 4	12. 1
2	57239. 7	43. 1	17. 5	47	39175. 1	735. 5	11. 8
3	57196. 6	60. 6	16. 8	48	38439. 6	747. 3	11. 8
4	57136. 0	77. 4	17. 3	49	37692. 3	759. 1	11. 3
5	57058. 6	94. 7	16. 6	50	36933. 2	770. 4	11. 2
6	56963. 9	111. 3	18. 8	51	36162. 8	781. 6	11. 0
7	56852. 6	130. 1	16. 0	52	35381. 2	792. 6	10. 6
8	56722. 7	146. 1	17. 1	53	34588. 6	803. 2	10. 5
9	56576. 6	163. 2	17. 1	54	33785. 4	813. 7	10. 3
10	56413. 4	180. 3	16. 7	55	32971. 7	824. 0	10. 1
11	56233. 1	197. 0	17. 4	56	32147. 7	834. 1	9. 5
12	56036. 1	214. 4	16. 7	57	31313. 6	843. 6	9. 6
13	55821. 7	231. 1	17. 6	58	30470. 0	853. 2	9. 1
14	55590. 6	248. 7	15. 8	59	29616. 8	862. 3	9. 0
15	55341. 9	264. 5	14. 7	60	28754. 5	871. 3	8. 7
16	55077. 4	279. 2	19. 6	61	27883. 2	880. 0	8. 5
17	54798. 2	298. 8	15. 4	62	27003. 2	888. 5	8. 0
18	54499. 4	314. 2	15. 4	63	26114. 7	896. 5	7. 9
19	54185. 2	329. 6	18. 4	64	25218. 2	904. 4	7. 6
20	53855. 6	348. 0	15. 1	65	24313. 8	912. 0	7. 3
21	53507. 6	363. 1	16. 2	66	23401. 8	919. 3	7. 1
22	53144. 5	379. 3	16. 0	67	22482. 5	926. 4	6. 7
23	52765. 2	395. 3	15. 8	68	21556. 1	933. 1	6. 4
24	52369. 9	411. 1	15. 9	69	20623. 0	939. 5	6. 2
25	51958. 8	427. 0	14. 6	70	19683. 5	945. 7	5. 9
26	51531. 8	441. 6	15. 5	71	18737. 8	951. 6	5. 6
27	51090. 2	459. 1	14. 4	72	17786. 2	957. 2	5. 1
28	50631. 1	473. 5	15. 3	73	16829. 0	962. 3	5. 1
29	50157. 6	488. 8	15. 3	74	15866. 7	967. 4	4. 7
30	49668. 8	504. 1	14. 5	75	14899. 3	972. 1	4. 4
31	49164. 7	518. 6	15. 4	76	13927. 2	976. 5	4. 0
32	48646. 1	534. 0	14. 4	77	12950. 7	980. 5	3. 7
33	48112. 1	548. 4	15. 6	78	11970. 2	984. 2	3. 6
34	47563. 7	563. 0	14. 3	79	10986. 0	987. 8	3. 0
35	47000. 7	577. 3	14. 2	80	9998. 2	990. 8	2. 9
36	46423. 4	591. 5	14. 1	81	9007. 4	993. 7	2. 5
37	45831. 9	605. 6	13. 9	82	8013. 7	996. 2	2. 2
38	45226. 3	619. 5	13. 6	83	7017. 5	998. 4	1. 9
39	44606. 8	633. 1	13. 5	84	6019. 1	1000. 3	1. 5
40	43973. 7	646. 6	13. 2	85	5018. 8	1001. 8	1. 4
41	43327. 1	659. 8	13. 2	86	4017. 0	1003. 2	0. 9
42	42667. 3	673. 0	13. 0	87	3013. 8	1004. 1	0. 6
43	41994. 3	686. 0	12. 6	88	2009. 7	1004. 7	0. 3
44	41308. 3	698. 6		89	1005. 0	1005. 0	
				90	0		

Tab. D.

Singu'i Gradus Meridiani Telluris e determinatione Celeb. de Maupertuis etc. Methodo a Celeb. Eulero ſuppeditata, calculati et per Perticas Gallicas expreſſi.

G.lat.	Hexap.Dec.	Diff. 1	D.ff. 2	G.lat.	Hexap.Dec.	Differ. 1	I.
0	56647. 9	0. 3	5	46	57134. 0	16. 3	1
1	56648. 2	0. 8	7	47	57150. 3	16. 4	1
2	56649. 0	1. 5	5	48	57166. 7	16. 3	1
3	56650. 5	2. c	5	49	57183. 0	16. 2	1
4	56652. 5	2. 5	6	50	57199. 2	16. 1	2
5	56655. 0	3. 1	6	51	57215. 3	15. 9	1
6	56658. 1	3. 7	6	52	57231. 2	15. 8	1
7	56661. 8	4. 3	5	53	57247. 0	15. 7	2
8	56666. 1	4. 8	5	54	57262. 7	15. 5	2
9	56670. 9	5. 3	6	55	57278. 2	15. 3	2
10	56676. 2	5. 9	5	56	57293. 5	15. 1	2
11	56682. 1	6. 4	5	57	57308. 6	14. 9	3
12	56688. 5	6. 9	6	58	57323. 5	14. 6	3
13	56695. 4	7. 5	4	59	57338. 1	14. 3	2
14	56702. 9	7. 9	6	60	57352. 4	14. 1	4
15	56710. 8	8. 5	4	61	57366. 5	13. 7	2
16	56719. 3	8. 9	5	62	57380. 2	13. 5	4
17	56728. 2	9. 4	5	63	57393. 7	13. 1	4
18	56737. 6	9. 9	4	64	57406. 8	12. 7	3
19	56747. 5	10. 3	4	65	57419. 5	12. 4	4
20	56757. 8	10. 7	5	66	57431. 9	12. 0	4
21	56768. 5	11. 2	4	67	57443. 9	11. 6	4
22	56779. 7	11. 6	4	68	57455. 5	11. 2	5
23	56791. 3	12. 0	4	69	57466. 7	10. 7	4
24	56803. 3	12. 4	3	70	57477. 4	10. 3	4
25	56815. 7	12. 7	4	71	57487. 7	9. 9	5
26	56828. 4	13. 1	4	72	57497. 6	9. 4	5
27	56841. 5	13. 5	2	73	57507. 0	8. 9	4
28	56855. 0	13. 7	4	74	57515. 9	8. 5	6
29	56868. 7	14. 1	2	75	57524. 4	7. 9	4
30	56882. 8	14. 3	3	76	57532. 3	7. 5	6
31	56897. 1	14. 6	3	77	57539. 8	6. 9	5
32	56991. 7	14. 9	4	78	57546. 7	6. 4	5
33	56926. 6	15. 1	2	79	57553. 1	5. 9	6
34	56941. 7	15. 3	2	80	57559. 0	5. 3	5
35	56957. 0	15. 5	2	81	57564. 3	4. 8	5
36	56972. 5	15. 7	1	82	57569. 1	4. 3	6
37	56988. 2	15. 8	1	83	57573. 4	3. 7	6
38	57004. 0	15. 9	2	84	57577. 1	3. 1	6
39	57019. 9	16. 1	1	85	57580. 2	2. 5	5
40	57036. 0	16. 2	1	86	57582. 7	2. 0	5
41	57052. 2	16. 3	1	87	57584. 7	1. 5	7
42	57068. 5	16. 4	1	88	57586. 2	0. 8	5
43	57084. 9	16. 3	1	89	57587. 0	0. 3	
44	57101. 2	16. 4	0	90	57587. 3		
45	57117. 6	16. 4					

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

§. 2. Antequam autem rem aggrediar, neceſſe erit praemittere aliquas definitiones, quas optici, et veteres et recentiores, ad deſcribendum, quid ſit imago in ſpeculo aliquo apparens, concinnarunt. *Alhazen* igitur opticae lib. V. cap. VI. dicit: *imago eſt forma viſibilis à polita ſuperficie reflexa*; vel *forma comprehenſa in corpore polito nominatur imago.* *Barrouius* in lect. opticis pag. 4. magis adaequate loquitur, cum dicit: *imagines autem nil plane ſunt aliud, quam lux ab obiectis ita reflexa vel refracta, vt rurſus in vnum locum talemque recolligatur ſitum, qualem tunc obtinuit, quum ab originali profluëret obiecto, directoque verſus oculum itinere procederet, quo ſit, vt ſimiliter obiecta, ſed tanquam alibi collocata, repraeſentent.* Bene haec certe ſe habent, ſi ſola vox: *ſimiliter*, omittatur, niſi eam generaliſſime intellectam velis. In nullo enim ſpeculorum curuilineorum genere imago ſimilis plane dici poteſt ſuo obiecto. Plura, quam quae huic definitioni neceſſaria ſunt, miſcet *Keplerus*, dum paralipom. in Vitellionem pag. 60. inquit: *imago eſt viſio rei alicuius, cum errore facultatum, ad viſum concurrentium, coniuncta.* Sapit enim magis metaphyſicam, quam phyſicam aut geometriam, haec explicatio.

§. 3. Praemiſſis his definitionibus imaginis in ſpeculo quocunque, ad inſtitutum iam propius accedam, ad locum nempe eum deſignandum, quem obiectum quodcunque, ſpeculo cuiuscunque generis oppoſitum, in ſpeculo occupare videtur. Abſoluit enim totius catoptricae tractationem praecipuam haec quaeſtio; ſed agit tantum de loco puncti vnius in ſpeculum radiantis; quoniam, ſi ſingu-

lorum talium punctorum imagines et loca determinata fuerint, totius deinde etiam obiecti extenſi locus iuſtus habetur. Ab antiquiſſimis igitur catoptricae ſcriptoribus haec lex ſtabilita fuit: *puncti in ſpeculum quodcunque radiantis imaginem ibi apparere, vbi cathetus incidentiae cum radio reflexo concurrit*; vt, ſi ex. gr. punctum radians ſit in R, à quo in ſpeculum ſphaericum conuexum cadat radius R I, cuius reflexus intret oculum intuentem in O; duxerunt ex R cathetum incidentiae R D, vergentem ad C, ſi C fuerit centrum arcus ſpecularis A B, deinde reflexum O I continuarunt in directum, donec concurreret cum catheto incidentiae in *r*, atque tum in loco *r* imaginem puncti R haeſuram eſſe aſſeruerunt. *Euclides* quidem in catoptricis non iisdem hiſce verbis ſententiam hanc, iam eo tempore receptam, plene effert, ſed id ſolum demonſtrat: in planis, conuexis et cauis ſpeculis aſpectabile quodlibet cerni in linea recta, ducta ab aſpectabili perpendiculariter ad planitiem, aut ad centrum ſphaerae, cuius portio eſt ſpeculum. Cum vero hoc per ſe intelligatur, punctum quodcunque apparere debere in radio reflexo, qui imaginem puncti ſui oculo quaſi affert; manifeſtiſſimum eſt, ipſum quoque hanc ſententiam exprimere voluiſſe; quamuis nusquam diſerte aſſerat, punctum radians apparere in radio reflexo; ex eius Prop. VII. et aliis tamen hoc non obſcure intelligi poteſt. *Ptolemaeus* deinde et *Alhazen* opticae lib. V. cap. 2 Nr. 8. diſerte ponunt: *imago in quocunque ſpeculo videtur in concurſu perpendicularis incidentiae et lineae reflexionis*. Hos ſecuti ſunt *Vitello*, *Fabry*, *Taquetus* et plures recentiorum alii, vt mirum ſit, errorem

Tab. III. Fig. 1.

hunc ad noſtram aetatem vſque per doctiſſimos viros potuiſſe propagari.

§. 4. At videamus iam probationes, quibus hoc aſſertum ſtabilire conati ſunt viri modo allegati; nam in hac re ſibi non defuerunt argumentis vtcunque ſpecioſis. Primus itaque *Euclides* experimenti ſeu phaenomeni loco praemittit ſuae demonſtrationi: *in ſpeculis quibuscunque*, *occupato*, hoc eſt, obtecto, *eo ſpeculi loco*, *in quem cadit perpendicularis*, *ducta à re aſpectabili ad ſpeculum*, *rem aſpectabilem non cerni.* Hinc Propp. XVI. XVII. XVIII. argumentatus eſt: quoniam occupato loco D punctum R cerni non poteſt, videbitur punctum R in aliquo puncto lineae rectae R *d*, productae in directum; videtur autem ſimul in radio O I, producto in directum; ergo videbitur in puncto aliquo, quod vtrique rectae RC et OI commune eſt, hoc eſt, in *r*. Quae vero in hac demonſtratione reiicienda ſint, dicam poſtea.

§. 5. Secundus *Albazen* duplex argumentum affert ad ſententiam eandem probandam. Prius nititur iterum
Fig. 2. experimento, nempe ſequenti. In ſpeculo ex. gr. ſphaerico conuexo E F, cuius centrum C, erigatur perpendiculariter bacillus B D, cuius tota imago intra ſpeculum apparet. Ponatur in hoc bacillo alicubi ſignum A, dicit illud appariturum in *a* ſic, vt diſtantiae B A et B *a* futurae ſint aequales, oculorum nempe iudicio, lib. V. cap. 2. Nr. 3. quod quidem experimentum, etiamſi verum eſſet, ſententiam tamen hanc potius euerteret, quam adſtrueret: ita legitimi nexus experimentorum cum concluſionibus illa aetas fuit inſcia; et in hoc ſolo ſapere vide-

videtur Arabs, quod argumentum *Euclidis*, modo allatum, cum ceteris ex eo decerptis, non afferat. Alterum eius argumentum metaphyſicum eſſe videri poteſt, dum cenſet, nullum digniorem imagini locum tribui poſſe, quam ab ipſo aſſignatum; atque ſic dignitatem ſitus perpendiculo metitur. *Alhazenum* preſſo pede ſequitur *Vitello*, ita, vt alter priori etiam hic, vti in ceteris quoque, ſit ſimillimus.

§. 6. Aſſerti falſi adhuc emendatiorem dedit probationem *Tacquetus*, catoptricae lib. 1. prop. 22. male tamen idcirco laudatus a *Clarkio* in nôtis ad *Rohalti* phyſicam parte 1. cap. 34. §. 18. quaſi recte propoſitum demonſtraſſet ſuum. Is adhibito eodem bacillo perpendiculari ad ſpeculum B D, ſed omiſſo ſigno A, experientia nos edoceri ponit, imaginem huius bacilli B*d* eſſe in directum cum bacillo ipſo. Hoc experimentum, adiungit porro, vel centies ab ipſo fuiſſe exploratum, atque eos, qui negant hoc phaenomenon, experimentum feciſſe aut oſcitanter, aut imperite, dum nempe ſtylum ſpeculo non exacte ad angulos rectos impoſuerint; cauſam quoque phaenomeni in eo ſitam eſſe ait, quod, cum perpendicularis ſtylus nuſpiam inclinetur, nulla etiam ratio adſit, cur imago in vllam partem magis, quam in aliam inclinet; ac proinde neceſſe eſſe, vt ea vnam cum ſuo prototypo lineam rectam efficiat. Hoc eodem vtroque argumento nituntur quoque adhuc omnes illi recentiorum, qui eandem ſententiam hucuſque propagarunt; ſed et ob ipſum hunc errorem admiſſum coguntur cum *Tacqueto* fateri, locum hanc ſententiam non habere in ſpeculis cauis, ſed veritatem aſſerti veterum deficere a phaenomenis in

caſu

caſu non vno. Quod quidem, vt *Keplerus* loquitur, *macula foeda eſt in pulcherrima ſcientia.*

§. 7. Primus autem, quantum inuenire potui, veterum huic ſententiae obſtitit *Keplerus* in Paralipom. ad *Vitellionem* pag. 56 ſeqq. eandemque emendaturus pag. 75. pro loco imaginis aſſignando in ſpeculo parabolico convexo ſequentia profert: ſit ſpeculum parabolicum $\alpha\beta\gamma$, oculus in ζ, obiectum in η, ſic, vt incidens $\eta\beta$, et reflexus $\beta\zeta$ faciant angulos aequales vtrinque cum tangente $\varepsilon\beta\delta$. Iam veteres optici, pro loco imaginis determinando, iubent ex η in ſpeculum ducere perpendicularem $\eta\theta$, atque reflexum $\zeta\beta$ tamdiu continuare, donec priorem perpendicularem ſecet in ω, ſtatuuntque punctum hoc ſectionis locum eſſe imaginis. *At*, pergit ille, *verior ratio iubet inuenire circulum, qui contineat rationem curuitatis, quam habet ſectio in* β, *puncto repercuſſus: (habent autem aliam atque aliam huiusmodi mixtae lineae) Sit quantitas* $\varkappa\beta$, *et ducta ex* β *ipſi* $\varepsilon\delta$ *perpendiculari, quae ſit* $\beta\varkappa$, *centrum circuli ponetur in linea* $\beta\varkappa$, *coniungeturque* $\beta\varkappa$, *eritque locus imaginis, vbi* $\zeta\beta$ *continuata ſecat* $\eta\varkappa$, *ſcilicet in* μ. Vocat deinde diſertis verbis rectam $\varkappa\beta$ rationem curuitatis.

Fig. 3.

§. 8. Quamuis itaque haud diffiteri poſſim, neſcire me, qua ex cauſa veterum regulae hanc nouam ſubſtituerit *Keplerus*, cum nullam ipſe conſtructionis ſuae afferat rationem: videtur tamen id ſolum efficere voluiſſe, vt hoc modo ſpeculum parabolicum pro ſitu puncti repercuſſus β reducatur quamproxime ad ſpeculum circulare, vt deinde ſimili modo illud tractari poſſit, quo haec tractata vſque ad illam aetatem fuerunt. Adeoque ſagaciſſimus

ciſſimus auctor methodum veterum ad alia ſpecula, quam circularia, extendi non poſſe, potius docet, quam ipſam methodum antiquam euertit. Nam facile patet, eandem hanc methodum keplerianam coincidere plane cum antiqua, ſi transferatur ad ſpecula circularia. Sed hoc praeterire non poſſum, primam in allegato loco omnium, quantum quidem ſcio, circuli oſculantis notionem occurrere. Quamvis enim quantitatem ipſius $\beta\,\kappa$ determinare non potuerit *Keplerus*, ideam tamen circuli oſculantis et radii oſculi animo ipſius inſediſſe euincunt omnia ipſi adhibita verba, qualia ſunt: *inuenire circulum, qui contineat rationem curvitatis, quam habet ſectio in* β; *habent aliam atque aliam rationem curuitatis huiusmodi lineae mixtae; ſit* $\kappa\,\beta$ *perpendicularis ad tangentem* $\varepsilon\,\delta$; *recta* $\beta\,\kappa$ *eſt ratio curvitatis.* Vt plane iucundum ſit intelligere, quae negotii huius, a recentioribus iam diligentiſſime pertractati, vmbra perſpicaciſſimo huic viro iam tum obuerſata fuerit.

§. 9. Meliori autem longe ſucceſſu veterum hanc opinionem, quam errorem in optica capitalem vocat, plane euertit *Barrouius*, ſubſtituitque illi primus aliam, ſuam, et quae veritati conformis eſt. *Si enim*, arguit ille in lectionibus opticis, lect. VI. §. 19. *imago a puncto reflexionis* B *tanto diſtat interuallo, quanto punctum radians ab eodem ſemouetur: ſol, ex huiusmodi reflexione conſpicuus, ad tantam, quantam directe ſpectatus, diſtantiam deberet apparere; quod immane quantum experientiae refragatur.* Aliud deinde ſubiungit experimentum, cum ſpeculo cauo inſtituendum, l. c. lect. X. §. 27. *Si tanquam circa punctum* a *accenſa candela ſpeculo cauo* EBF *exponatur*,

oculo velut ad d *ſito, longe maiori diſtans interuallo conſpicietur, quam ipſo a* B; *quinimo, tantillo verſus centrum illam adducendo, non aequali diſtantia, ſed admodum maiori videbitur elongari, tanta circiter ad ſenſum probabilemque coniecturam, quantam proportio requirit a nobis praeſtita.* Ita vero deinde vir egregius erroneae legitimam ſubſtituit opinionem, vt mirum ſit, hanc neglectam hucuſque in ſcriptis opticorum iacere.

§. 10. Accedam nunc ad id, vt oſtendam, vbi haereant vitia in probationibus veterum occurrentia. Igitur *Euclidis* demonſtratio nititur experimento plane falſiſſimo, cuius falſitas manibus fere palpari poteſt, ita, vt vix ſpeculum, vel planum, vel aliud, vnquam ad manus huic fuiſſe credi poſſit. Tegatur enim ex eius ſententia punctum D in quocunque ſpeculo: obiecti imago nihilominus in oculos, plane vt ante, incurret. *Alhazeni* et *Vitellonis* experimenta, ad probationem ſuam adducta, vim quoque naturae inferre, abunde iam probaui ex *Barrouio*, §. 9; et quae de dignitate loci ab ipſis aſſignati in medium proferunt, prudenti harum rerum aeſtimatori quam minime perſuadebunt.

§. 11. Paullo autem difficilius eſt inuenire ea, quae in *Tacqueti* demonſtratione monenda occurrunt. Vera dixiſſet celebris hic auctor, ſi dixiſſet: imago bacilli B*a*,
Fig. 2. *apparet* in directum iacens cum bacillo ipſo: cum vero dixit: *eſt* in directum iacens, veritatem rei praeteruectus eſt. Nego itaque plane, in tali experimento imaginem reuera iacere in directum cum bacillo, quamuis oculo phaenomenon hoc ita appareat eique illudat. Quodſi enim aequa

qua lance trutinemus demonſtrationem tacquetianam, eius ratiocinium huc redit, vt ſequens exinde formetur ſyllogiſmus, quo probat punctum *a* eſſe in perpendiculari producta DAC: quicquid apparet in perpendiculari E*ad*, illud eſt in perpendiculari; ergo punctum *a* eſt in perpendiculari. Quod iam attinet ad minorem propoſitionem huius ſyllogiſmi, ea negari non poteſt, ſed omnino recte ſe habet et experimento comprobatur: ſed maior propoſitio vera non eſt, quod ſequenti nouo experimento teſtatum facio. Imponatur ſpeculo conuexo GAH gnomon chartaceus ABD, ita, vt crus AB perpendiculariter inſiſtat polo ſpeculi A, et crus BD antrorſum verſus oculum O ſpectet. Tum inſpiciatur imago huius gnomonis vno oculo, eoque ſic poſito, vt exiſtat in plano trianguli BAD: apparebit totius gnomonis ABD imago in ſpeculo A*bd* in lineam rectiſſimam extenſa, et iacens in perpendiculari BA protracta, vbicunque oculus in plano memorato verſetur. Idem experimentum ſimili ſucceſſu inſtitui poſteſt, ſi polo ſpeculi A inſiſtat rectus tantum bacillus, ſed verſus oculum O inclinatus, cuius imago pariter in perpendiculari apparet. Iam ſi quis argumentari vellet: punctum *d* apparet in perpendiculari AB*b*, ergo exiſtit reuera in eadem: nonne *Tacquetus* ipſe huic aduerſaretur, dicendo: ſit DE radius incidens, et reflexus EO, ducatur cathetus incidentiae DC, ſecans reflexum retro productum in *d*, erit locus imaginis puncti D in *d*, extra perpendicularem BA*b*. Ex his igitur manifeſtiſſimum eſt plane concludi non poſſe: imago rectae perpendiculariter inſiſtentis apparet in perperdiculari hac producta, ergo reuera ibi exiſtit. Accidit enim profecto Fig. 4.

 hic

hic fallacia optica, quae oculo illudit eodem modo, quo bacillum vel gnomonem in quouis plano horizontali verſus oculum inclinate erectum horizonti perpendicularem eſſe putamus, quod reipſa tamen longe aliter ſe habet. Apparebit enim ex vera determinatione imaginis in tali ſpeculo, §. 12. adducenda, ſi conſtructione geometrica mox indicanda res perficiatur, imaginem bacilli A*bd* revera verſus oculum aſpicientem inclinatam eſſe, ſed declinatione ab ipſa perpendiculari BC tam parua, ſi oculus propius poſitus ſit, vt impoſſibile ſit eam ab oculo diſtigui. Valeat ergo *Tacquetus*, et cum eo recentiores ii omnes, qui putant ſe quam rigidiſſime demonſtraſſe, punctum in ſpeculum ſphaericum radians imaginem ſuam nanciſci ibi, ubi cathetus incidentiae radium reflexum ſecat.

§. 12. Reiecta igitur hac falſa opinione, accedam ad eam, quae vera, noua tamen non eſt, ſed inde iam a *Barrouii* temporibus, et ab ipſo, et ab aliis quibusdam, exculta fuit. Dico itaque, imaginis locum in ſpeculo quocunque ibi eſſe, vbi duo radii incidentes infinite vicini
Fig. 5. BM, B*m*, poſt reflexionem, in M et *m* factam, concurrunt, vel ſe inuicem ſecant, ſcilicet in F. Vt itaque etiam quantitas huius rectae MF, in radio reflexo poſitione dato, ad vſus ſequentes in promtu ſit: notum eſt ex analyſi infinite paruorum *Hoſpitalii* §. 119. vocatis radio incidente $BM = y$, et demiſſa in hunc ex centro C perpendiculari CE, appellataque $EM = a$, futuram eſſe $MF = \frac{ay}{2y-a}$; quae eadem formula deducitur etiam ex conſtructione geometrica ea, quam *Barrouius* tradit lect. opt. lect. IX. §. 11. vbi ſubiungit, punctum F. eſſe locum ipſiſſimum,

circa

circa quem puncti B imago conſiſtit. Vnde ſequens oritur conſtructio geometrica pro inueniendo puncto F, quae in *Hoſpitalii* analyſi infinite paruorum omiſſa eſt, in ſpeculo ſphaerico concauo: demittatur in incidentem perpendicularis ex centro C, quae ſit CE, et ducatur in punctum reflexionis M radius CM; tum biſecta EM in G, ducatur GH parallela radio reflexo MF; ſecabit haec GH alicubi radium, ſcilicet in H; ſi itaque ex puncto radiante B per punctum H ducatur recta BHF, ſignabit ea in radio reflexo locum imaginis F quaeſitum. Nam erit ſic ob triangulum MGH aequicrurum, BG$(y-\frac{1}{2}a)$: GH$(\frac{1}{2}a)$=BM(y): MF$(\frac{ay}{2y-a})$. Quodſi autem radius incidens BM minor fuerit, quam $\frac{1}{2}a$ vel MG, fiet MF negatiua, atque tum ſequens conſtructio locum habebit: demittatur in productam MB perpendicularis CE ex centro C, et ducatur in punctum reflexionis M radius CM, tum, biſecta EM in G, ducatur GH parallela radio reflexo retro producto MF, ſecabit haec GH alicubi radium, ſcil. in H; ſi itaque ex puncto radiante B, et puncto H, ducatur recta HB, ſecabit ea radium reflexum in loco quaeſito imaginis F. Erit enim ſic BG $(\frac{1}{2}a-y)$: GH $(\frac{1}{2}a)$=BM(y): MF $(\frac{ay}{a-2y})$. Similis conſtructio locum quoque habet in ſpeculo ſphaerico conuexo. Nam cum ibi y fiat negatiua, erit MF $=\frac{-ay}{-2y-a}=\frac{ay}{2y+a}$. Producantur itaque et radius incidens et reflexus retro; tum demiſſa in illum perpendiculari CE biſecetur ME in G, et per G ducatur parallela reflexo MF, ſecans radium in H, et ducta BH ſecabitur radius reflexus in F, loco imaginis quaeſito. Eſt enim ſic BG$(y+\frac{1}{2}a)$: GH $(\frac{1}{2}a)$ =BM(y): MF $(\frac{ay}{2y+a})$.

Fig. 6.

Fig. 7.

§. 13. Cum itaque duorum radiorum incidentium ſibi proxime vicinorum focus quoque ſit in reflexorum mutuo concurſu: patet generaliter verum eſſe, quod locus imaginis ibi ſit, vbi radiorum datur focus; adeoque focum, a puncto radiante productum, et eiusdem imaginem, eſſe vnum idemque. Iam vero videamus quoque, an caſus aliqui dentur, in quibus veterum hypotheſis in aſſignando loco imaginis coincidat cum hac vera. Igitur in ſententia veterum, poſito ſpeculi centro in C, et ducta catheto
Fig. 5. incidentiae BCL, erit puncti radiantis B imago in L, in quo nempe puncto reflexus ML ſecatur. Pro determinanda autem ML, poſitis vt ante $BM = y$, $EM = a$, $CM = r$, et ſinu toto $= 1$, erit CME ſinus $= \frac{\sqrt{rr-aa}}{r^2}$ coſinus $= \frac{a}{r}$, adeoque dupli huius, nempe BML ſinus $= \frac{2a\sqrt{rr-aa}}{r^2}$, coſinus $= \frac{\sqrt{(r^4-4a^2r^2+4a^2)}}{r^2} = \frac{\pm(r^2-2a^2)}{r^2}$; erit porro $BC = \sqrt{(BE^2+EC^2)} = \sqrt{(y^2-2ay+a^2+r^2-a^2)} = \sqrt{(y^2-2ay+r^2)}$, adeoque LBM ſinus $= \frac{CE}{BC} = \frac{\sqrt{rr-aa}}{\sqrt{(y^2-2ay+r^2)}}$, coſinus $= \frac{BE}{BC} = \frac{y-a}{\sqrt{(y^2-2ay+r^2)}}$. Hinc componetur ſinus BLM $=$ ſin. BLN $=$ ſin. (BML$+$LBM) $= \frac{2a \cdot \overline{y-a} \cdot \sqrt{rr-aa} + (r^2-2a^2)\sqrt{rr-aa})}{r^2\sqrt{(y^2-2ay+r^2)}}$; vnde inſtituta analogia: ſin. BLM : ſin. LBM $=$ BM : ML, inuenitur $ML = \frac{r^2 y}{2ay-2a^2 \pm (r^2-2a^2)}$; qui valor ipſius ML, ſi ponatur aequalis valori ipſius $MF = \frac{ay}{2y-a}$, inuenitur $y = \frac{ar^2-2a^3}{r^2-a^2}$, vel $y = 0$. Si itaque radii incidentis BM longitudo habuerit alterutrum horum valorum aſſignatorum, locus imaginis ex veterum hypotheſi coincidet cum loco imaginis vero; in omnibus vero reliquis caſibus haec duo loca diſcrepabunt inter ſe.

§. 14. At vero memoratu dignum eſt, in ſolis ſpeculis planis hypotheſin veterum et hypotheſin veram, quam *barrouidnam* appellare licebit, coincidere, et vnum eundemque locum imaginis producere, quod certe in falſam opinionem veteres deducere potuit, quod credebant vniuerſaliter verum eſſe, quod in ſolis ſpeculis planis locum habet. Sit enim tale ſpeculum planum AC, punctum radians B, et radii incidentes infinite vicini BM, B*m*; cum reflexis MN, *mn*; et quia recta AC, tanquam arcus circuli ſpectata, centrum habet infinite diſtans, erit in formula $\frac{ay}{2y-a}$ ponenda $a = \infty$, hinc erit $MF = \frac{ay}{-a} = -y$, hoc eſt, in retro producta NM erit capienda $MF = y = MB$. Coniungantur ergo puncta B et F recta linea, ſecatura ſpeculum in A; atque erit in duobus triangulis FAM, BAM, angulus $p = n = m$; MB = MF, et MA communis vtrique triangulo; quare triangula haec erunt aequalia et ſimilia; hoc eſt, apud A erunt anguli recti; eritque ſic punctum F in concurſu radii reflexi MN et catheti incidentiae BA.

§. 15. Ingerit denique ſe hic dubium quoddam, quod effecit, vt *Tacquetus* ſuam imaginis definiendae hypotheſin ſpeculis concauis non niſi in quibusdam caſibus conuenire aſſeruerit, quam in planis et conuexis vniuerſaliter veram eſſe contendit, prout videre licet in eius catoptricae libro III. prop. 29. et 30; et ad quod ne *Barrouius* quidem in recta ſententia reſponſionem inuenire potuit, ſed illud, *improbam difficultatem* vocatum, lect. opt. XVII. §. 13. tanquam ſcopulum praeteriit potius, quam ſuſtulit. Verſatur dubium hoc in eo, vt quaeſtio moue-

moueatur, in quonam loco appariturum ſit obiectum AB longius a ſpeculo remotum, oculo O proxime apud ſpeculum poſito. Si veteres audiamus, iuxta eorum ſententiam
Fig. 9. ductis cathetis incidentiae A*a* et B*b* imago erit in *ba*; ſed intra hanc et ſpeculum ipſum ED oculus ſitus eſſe ſupponitur, et conſequenter incapax videndae imaginis *ba*. Idem vero accidit quoque, ſi puncta imaginis *b* et *a* legitima methodo, *barrouiana* nempe, quaerantur. Suſpenſa igitur hic et ambigua haeret theoria, docens obiectum videri per radios DO, EO, *tanquam ex infinito interuallo fluentes*, et *nihil hic reliquum eſſe*, *praeter merum praeiudicium*, *quo diſtantia imaginis aeſtimetur*. Vide annotationes ad *Rohalti* phyſicam, parte I. cap. 34. §. 18. Decidit vero atque ad oculum demonſtrat experientia, obiecta in his circumſtantiis apparere oculo erecta, naturali ſua magnitudine praedita, ſed aliquantum minus diſtincta. Qua ergo via huic veritati ratio ſua aſſignanda erit? Dico itaque: ſi obiectum fuerit remotius, et oculus valde propinquus ſpeculo, ſpatium reflectens ED eſſe, ne dicam infinite, ſed ita tamen paruum, vt pro ſpeculo plano haberi poſſit; quod ſequenti ratiocinio demonſtro. Ducantur radii EC, DC, nec non diameter GOCH, ponanturque radii GC, EC, DC, $= r$, CO $= a$, OD $= q$, OE $= p$; atque demiſſis in diametrum perpendiculis DK, EI, leui calculo inuenitur, eſſe OK $= \frac{r^2-a^2-q^2}{2a} = m$; et OI $= \frac{r^2-p^2-a^2}{2a} = n$, quare habebitur EOC ſinus $= \frac{\sqrt{pp-nn}}{p}$, coſinus $= \frac{-n}{p}$; nec non DOC ſinus $= \frac{\sqrt{qq-mm}}{q}$, coſinus $= \frac{-m}{q}$; vnde erit ſinus differentiae EOD $= \frac{-m\sqrt{pp-nn}+n\sqrt{qq-mm}}{pq}$. Iam vero ſit oculus O ſpeculo

culo ED valde vicinus, aut vero ſint q et p quantitates valde paruae, erit OC, ſiue a, fere aequalis radio r; ponamus itaque $a = r$, fiet hinc $m = \frac{-q^2}{2a}$, $n = \frac{-p^2}{2a}$; vnde ſinus EOD euadet $= \frac{q\surd(4a^2-p^2)-p\surd(4a^2-q^2)}{4a^2}$; quoniam vero vlterius reſpectu ipſius a euaneſcunt p et q, erit ſinus EOD $= \frac{q-p}{a}$, hoc eſt, quia q et p fere ſunt aequales, erit ſinus EOD fere aequalis nihilo, adeoque multo magis arcus ED pro portione ſpeculi valde parua, vel pro paruo ſpeculo plano habendus; vnde non mirum eſt, indicata phaenomena in eo ita occurrere, prout natura ſpeculi plani ea requirit; repraeſentatio tamen obiectorum debebit eſſe aliquantum obſcurior et confuſior, quam in ſpeculo per totum plano, quia hic ſe ex ſpeculis paruulis planis ſimilibus adiacentibus immiſcent nouae imagines, ad multiplicandam imaginem, ſed non cum integro effectu, tendentes. Neque praetereundum hoc loco eſt, allegatum phaenomenon, vt nempe imagines obiectorum remotorum erectae appareant in ſpeculo cauo, non cerni in tali ſpeculo, quod paruum ſit, et conuexitatem habeat magnam; oculus enim tam prope huic ſpeculo applicari non poteſt, vt ſpatium reflexionis efficiat valde paruum, ſeu vt efficiat ſpeculum paruum planum.

§. 16. Vt occaſione horum ex dioptricis quoque aliquid tangam, afferam coronidis loco methodum determinandi concurſum duorum radiorum infinite vicinorum, in lentem quamcunque incidentium, quorum radiorum fons, vel punctum radians, ab axe lentis vtcunque diſtet, et in vtraque ſuperficie lentis, in ingreſſu et egreſſu, hoc

 eſt,

eſt, duplicem refractionem patiantur. Sit igitur diaphanum ab äere diuerſum, terminatum duabus ſuperficiebus ſphaericis M m, cuius radius M C, et N n, cuius radius Nk; in hoc ex puncto radiante B quomodocunque ſito incidant radii infinite vicini B M et B m, qui poſt primam hanc refractionem vniantur in puncto F, ſed poſt alteram refractionem in ſuperficie Nn concurrant in puncto f; quaeritur determinatio puncti f, ſeu quantitas linae Nf. Sit igitur radii incidentis B M longitudo $= y$, et demiſſis ex centro C perpendicularibus in radium incidentem continuatum et refractum, quae ſint C E et C G, ſint M E $= a$, M G $= b$, ſitque tandem ex äere in diaphanum ratio ſinus inclinationis ad ſinum anguli refracti $= m : n$, atque erit ex *Hoſpitalii* analyſi infinite paruorum §. 133. M F $= \frac{b^2 m y}{b m y - a n y - a^2 n}$; qui valor ipſius M F, cum vniuerſaliter verus ſit, locum quoque habebit in puncto f, ſi hoc tanquam radians concipiatur. Ponatur itaque radius incidens fN $= x$, ſintque duo tales incidentes radii ſibi infinite proximi fN, $f n$, qui poſt primam hanc refractionem punctum concurſus verſus B nullum habebunt, ſed in diaphano infinito C K diuergentes verſabuntur, aut vero habebunt focum virtualem in F; quodſi itaque ad analogiam radii prioris incidentis B M pro hoc incidente fN iam ponatur N H $=$ A N L $=$ B, erit nunc eodem, quo prius, iure N F $= \frac{-B^2 m x}{B m x - A n x - A^2 n}$ vbi ſcil. $m : n$ eſt ratio refractionis, vti ante, ex äere in diaphanum. Ex modo inuenta hac aequatione eruatur iam valor ipſius x, qui ergo inuenitur hic: N$f = \frac{A^2 n}{B m - A n + \frac{B^2 m}{NF}}$.

Igitur, dato diaphano quocunque, terminato vtrinque ſuper-

perficie circulari, ex gr. cuius centra ſint C et K, determinatur focus duorum radiorum viciniſſimorum, ex puncto radiante quomodocunque ſito egreſſorum, ſequenti modo: ducatur radius incidens productus B M E, atque huic conueniens aſſignetur refractus, huic refractioni primae debitus, qui ſit M F; ex centro C demiſſis perpendicularibus C E, C G, capiantur menſurae in ſcala geometrica ipſarum M E $= a$, et M G $= b$, quo facto calculus arithmeticus haud difficulter dabit numerum ipſius M F $= \frac{b^2 m}{bm - an - \frac{a^2 n}{y}}$; cum itaque vitrum vel diaphanum datum in charta delineatum eſſe ſupponatur: dabitur ex hac menſura quoque longitudo N F. Tum itaque ex aſſumto radio incidente M N, ducatur conveniens ipſi refractus N f, atque in hoc ſumta longitudine N $f = \frac{A^2 n}{Bm - An + \frac{B^2 m}{NF}}$, determinatum erit f, punctum concurſus poſt duplicem refractionem, idque geometrice et accuratiſſime, non vero quam proxime tantum, vti communiter fieri ſolet. Vel ſi deſideretur conſtructio geometrica, illa pro determinando primum puncto F ex *Hoſpitalio* l. c. erit haec: fiat angulus E C b = G C M, capiatur M $k = \frac{a^2}{y}$, fiatque $b\,k : b$ E = M G : M F; pro inueniendo etiam porro puncto f fiat angulus L K Z = H K N, addatur ad Z N recta N X $= \frac{B^2}{NF}$, et fiat Z X Z L = H N : N f. Tab. IV. fig. 2.

Vt vero punctum radians reduci quoque poſſit ad axem talis diaphani, coniungantur centra C et K inter ſe linea recta producta vtrinque C K, atque ad hunc axem Fig. 1.

 ex

ex B demittatur perpendicularis B α, ſintque $\alpha\beta = p$; $\beta C = r$ K N $=$ R, nempe pro diaphano, ſuperficiebus circularibus praedito, $\alpha B = q$, craſſities diaphani ſiue lentis $= d$, eritque B C $= \sqrt{(\alpha B^2 + \alpha C^2)} = \sqrt{(BE^2 + EC^2)}$; retentis igitur antecedentibus adhuc denominationibus habebitur aequatio $\sqrt{(p^2 + 2pr + r^2 + q^2)} = \sqrt{(y^2 + 2ay + r^2)}$; vnde deducitur $y = \pm\sqrt{(p^2 + 2pr + q^2 + a^2)} - a$; valere autem poteſt ſolum ſignum $+$, vt ne radius incidens C M fiat negatiuus. Vt iam punctum radians ſit in ipſo axe lentis alicuius dioptricae, ponatur $q = 0$, eritque ſic iam $y = \sqrt{(p^2 + 2pr + a^2)} - a$, et M F $= b^2m : [bm - \overline{an} - \frac{a^2n}{\sqrt{(pp + 2pr + aa)} - a}]$. Sint praeterea radii incidentes axi viciniſſimi, vt obtineatur focus principalis, poni debet $a = r$, $b = r$, et hinc M F $= \frac{r^2m}{rm - rn - \frac{r^2n}{p}}$; erit quoque A $=$ R, et B $=$ R, hinc generaliter pro omni lege refractionis oritur $Nf = \frac{nR(\overline{r \mp d}.pm + \overline{r \mp p}.nd)}{\overline{m-n}\,(\overline{r-d}.pm + \overline{r+p}.nd) + mR(\overline{m-n}.p - nr)}$ quae formula, ex genuina methodo deducta, coincidit cum illis, quae approximatione tantum deriuatae ſunt ab auctoribus, ſi pro refractione ex aere in vitrum ponatur $m = 3$. $n = 2$. Si denique craſſities lentis negligatur, erit N $f = \frac{npRr}{\overline{m-n}.\overline{R+r}.p - nrR}$; aut ſi fuerit R $= r$, quod in pleriſque lentibus obtinet, orietur N $f = \frac{pr}{\frac{m-n}{n}\,2p - r}$.

DE CORPORVM PLANO INCLINATO IMPOSITORVM DESCENSV.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Corpus firmum, plano inclinato impoſitum, duplici modo deſcendere per plani longitudinem poteſt. Primo enim deſcenſum ſuum abſoluit vel ſic, vt centrum eius grauitatis C deſcribat lineam rectam *Cc*, plano inclinato *Eb* parallelam, atque vt latus corporis vnum idemque, veluti AB; ſemper plano inclinato maneat contiguum; in hoc caſu corpus dicitur: *deſcendere ſimpliciter*, *deſcendere radendo*, vel *labi* aut *repere*. Deinde etiam quibusdam in caſibus corpus ſolidum obſeruari poteſt deſcenſum ſuum in plano inclinato perficere ſic, vt centrum grauitatis in eo C, aut deſcribat durante deſcenſu arcus circulares CD, DE, E*c*, circa angulos ſuos ſibi ſuccedentes B, F, G, H, tanquam circa totidem centra; aut vt ipſum circa ſe gyretur, quod id globo et cylindro transuerſim plano tali impoſitis accidit; neque adeo vnum idemque latus AB, ſed ſingula corporis latera ſucceſſiue plano inclinato fiant contigua; in hoc caſu corpus dicitur: *deuolui* vel *rotari*, vel *deſcendere voluendo*. Tab. IV. Fig. 3. Fig. 4.

§. 2. In horum caſuum altero, quo nempe corpus rotando deſcendit per planum inclinatum, initium motus ſemper ita fit, vt corpus prono capite prolabatur, atque deinde denuo erectum ſimili rurſus modo procidat. Ana-

 logus.

logus itaque huic lapſui caſus eſſe videtur is, in quo corpus, plano horizontali inſiſtens, pronum prolabitur, quotiescunque *linea directionis* in eo cadit extra baſin, qua inſiſtit plano horizontali. Voco autem *lineam directionis* lineam rectam CF, quae ex corporis centro grauitatis C perpendicularis ducitur ad horizontem D*b*. Quae procidentia, in plano horizontali facta, cum a figura corporis et ſitu lineae directionis dependeat; ſimiliter in plano inclinato locum habere viſa fuit. Atque hinc factum eſſe puto, vt celeberrimi auctores phyſici hucusque omnes in ea opinione fuerint: *corpus plano inclinato impoſitum rependo deſcendere, ſi linea directionis eius intra baſin cadat, qua plano inclinato inſiſtit; aliud vero corpus rotando deſcendere, ſi eadem linea cadat extra baſin eius.*

Fig. 3.

§. 3. In hac regula falſum eſt corpus ſemper rotando deſcendere, quotiescunque linea directionis cadit extra baſin. In multis enim caſibus contrariatur experientiae hoc aſſertum; vt, *ſi capiatur* ex. gr. *parallelepipedum ligneum, altum* 3 *poll. latum* 2, *craſſum* $1\frac{1}{2}$, *atque illud imponatur plano inclinato eousque eleuato, vt linea directionis* CF *manifeſto cadat extra baſin; obſeruabitur, illud non rotando, ſed rependo deſcendere*, quod tamen accidere non deberet. Vt igitur in hac re non tam facili, ac prima quidem fronte videri poſſet, ingenium naturae addiſcerem, ſequenti primum modo ratiocinatus ſum.

Experim. 1.

§. 4. Quoniam in omni motu a grauitate oriundo centrum grauitatis deſcendit, quantum poteſt et vbicunque poteſt: putaui exinde ſecuturum eſſe, vt, ſi rotatione corporis ingruente centrum hoc deſcendere poſſit, corpus

pus rotaretur; ſin autem, rotatione corporis ſuppoſita, centrum grauitatis aſcendere in altum deberet, in eius locum reptionem ſucceſſuram eſſe. Veluti, quia centrum grauitatis C, ſuppoſita rotatione circa G, tanquam fulcimentum, deſcendit per arcum circularem CH, neque in hoc caſu ſuppoſita rotatio corporis aſcenſum aliquem centri grauitatis requirit: putaui futurum eſſe, vt corpus ſic locatum rotando deſcenderet. Verum enim vero et huic explicationi plane repugnat experientia, atque etiam experimentum I. modo allegatum. Deinde congruit penitus eadem haec regula cum vulgari hucusque vſitata, quod paulo poſt deprehendi, et ſequentem in modum demonſtro. Fig. 5.

§. 5. Quotiescunque centrum grauitatis deſcenſurum eſſet, ſuppoſita rotatione, toties linea directionis cadit extra baſin corporis. Nam ſit corpus ECI plano inclinato AD ita impoſitum, vt ſuppoſita rotatione circa E centrum grauitatis C deſcendat per arcum CG, ducatur per E recta horizontalis FEG, cum verticali EH ex E educta. Neceſſe igitur eſt, vt centrum grauitatis corporis C ſit alicubi in quadrante circuli deſcendente HCG, non autem in quadrante circuli aſcendente FH. Si igitur centrum grauitatis fuerit in C, ex eo demiſſa linea directionis CB parallela erit cum recta EH, et verſus partes G iacebit; cadet ergo extra punctum E, hoc eſt, extra baſin corporis KE; conſequentur, ſi quis dixerit, ſubſequente rotatione centrum grauitatis deſcendere, idem dicit, ac corporis lineam directionis cadere extra baſin. Fig. 6.

§. 6. Voti igitur mei hac opera compos non factus, deprehendi ex variis ab initio inſtitutis tentaminibus potius

quam

quam experimentis: *corpus, quod in plano inclinato deſcenderet rependo, ſi libere ſibi permittatur, ex quiete ipſi conciliata concitari in motum rotatorium: et prono capite prolabi, ſi filum, etiam tenue, aut faſcia chartacea, ipſi transuerſim oppoiiatur primum, atque tum demum illud ſibi relinquatur, et ſimul linea directionis extra baſin cadat.* Deinde porro aliquoties vidi, *corpus quod in plano inclinato deſcendit rependo, deſcendere rotando in eodem, ſi planum obducatur panno aliquo rudiori et aſpero, etiamſi linea directionis cadat vtrobique extra baſin.* Vnde manifeſtum fit, deberi haec phaenomena vnice aſperitatibus plani inclinati, modo maioribus modo minoribus, atque in his cauſam eorum eſſe quaerendam. In qua ſententia eo magis confirmatus fui, cum viderem, *corpus in vna plani inclinatione repèndo vel rotando deſcendens, in omnibus aliis plani inclinationibus ſimili modo deſcendere.*

§. 7. Ex his mihi enata fuit ſequens theoria, quam explicatam prius dabo, vt deinde eo applicatius varia experimenta adducere poſſim, quae eam optime confir-
Fig. 7. mant. Sit plano inclinato BD impoſitum corpus quodcunque FCI, cuius centrum grauitatis G, baſis FI; ſintque praeterea AB linea horizontalis, huic perpendicularis AD, et corporis linea directionis CG. Manifeſtum nunc eſt, corpus hoc deorſum ſollicitari a pondere ſuo reſpectiuo, hoc eſt, a potentia, quae, poſito corporis pondere abſoluto $=P$, inuenitur eſſe $=\frac{AD}{DB}\times P$. Hac potentia ſollicitatur quidem corporis centrum grauitatis, eidemque perfecte obediret quoque corporis baſis IF, niſi obeſſet ipſi ſcabrities plani, aut frictio eius in hac inclinatione

natione ſub angulo ABD reperiunda, quam frictionem vocabo f. Cum autem motui baſeos frictio obſtat, efficit ea, vt in punctum quoduis baſeos, plano inclinato contiguae, agere cenſeri tantum poſſit potentia $\frac{AD}{DB} \times P - f$. Quantum autem praeualet potentia agens in centrum grauitatis ſupra potentiam agentem in punctum baſeos quodcunque F: tantum increſcit potentia corpus ad rotationem ſollicitans, vt hinc differentia harum potentiarum, quae eſt f, pro potentia corpus ad rotationem impellente aſſumi poſſit; quoniam per potentiam, quae protrahit baſin corporis, hoc ſe motui rotatorio quaſi ſubducit in ſingulis momentis. Agit autem haec potentia rotatoria in C, atque ſic in brachium vectis homodromi CF, quia rotatio circa punctum F, tanquam circa hypomochlium peragi debet. Momentum itaque huius potentiae rotatoriae, vecti CF applicatae, demiſſa ex C perpendiculari CE ad DB, erit $= f \times CE$. Haec potentia rotatoria integrum effectum ſuum ederet, ſi planum BD eſſet verticale, et puncto F aliquid reſiſteret; neque adeo pars ponderis P corpus ad planum inclinatum adhuc apprimeret. Ergo ſequitur hinc, inter duas has potentias, priorem rotatoriam atque hanc alteram, quam *appreſſoriam* voco, dari conflictum eſſeque hanc illi contrariam, vt ſi illa vincat, corpus rotando, ſi vero haec praeualeat, corpus rependo deſcendat. Vt igitur definiatur potentia appreſſoria, exponatur corporis pondus abſolutum P per CG verticalem, atque reſolvatur ea in CE perpendicularem ad planum, quam voco *lineam appreſſionis*, et CK, plano BD parallelam; eritque magnitudo potentiae appreſſoriae $= CE$; quoniam vero etiam haec agit in vectum

C E : erit eius momentum $= CE \times EF$. Orietur itaque haec regula ; *corpus plano inclinato impoſitum deſcendere rotando , ſi fuerit* $f \times CE > CE \times EF$, *aut vero* $f > EF$; *idem autem corpus deſcendere rependo , ſi fuerit* $f < EF$.

§. 8. Hinc , vt caſus pro rotatione vel pro reptione determinentur , determinari antea oportet frictionem, quam planum ſub data inclinatione in baſin corporis exercet. Cum autem difficilius frictio haec explorari poſſit in plano inclinato , quam in horizontali : vocabo hic in ſubſidium theorema ab excellentiſſ. *Bulffingero* in *Commentariorum Tomo II. pag.* 405. traditum ; quo ad ſchematiſmum meum reuocato , et vocata frictione horizontali F , habetur $f = \frac{AB}{DB} \times F$. Eſt autem ob ſimilia triangula D A B et G E C , $\frac{AA}{DB} = \frac{CE}{CG}$, vel , ob $CG = P$, erit $\frac{AB}{DB} = \frac{CE}{P}$, et hinc $f = \frac{CE}{P} \times F$. Ex quibus regula fluit haec , iam magis concinna : *corpus plano inclinato impoſitum deſcendere rotando , ſi fuerit* $F > \frac{EF}{CE} \times P$; *idem autem corpus deſcendere rependo , ſi fuerit* $F > \frac{EF}{CE} \times P$.

§. 9. Eruta nunc regula pro definiendo quolibet motu corporis plano inclinato impoſiti , ſupereſt , vt ea ad experimenta , tanquam ad lapidem lydium , exploretur videaturque , an experientiam ſibi habeat amicam , nec ne. Cum autem pro inſtituendis iam experimentis requirantur menſurae exactae frictionis horizontalis rectarum E F , C E , et ponderis abſoluti : exponam antea breuiter , qua ratione corporis cuiuscunque ſub examen vocati centrum grauitatis et frictionem horizontalem explorauerim ; quo-niam

niam ex illo inuento dimenſiones rectarum E F, C E, per ſe fluunt, et pondus abſolutum bilance accurata quam facillimum eſt inuentu.

§. 10. Pro cognoſcendo centro grauitatis in corporibus, quae disquiſitioni meae ſubieci, ſuſpendi ea ex filo ſerico tenuiſſimo, ope cerae agglutinato, in variis ſuperficiei punctis eousque, donec aliquod reperirem, ex quo ſuſpenſum corpus ſuperiorem ſuperficiem haberet perfecte horizontalem; atque tum in directione fili ſuſpendentis perfoſſa cera mediante acu ſubtili, centrum quaeſitum anguſto puncto notaui et expreſſi. Sed ſic quidem obtinui ſolum centrum grauitatis ſuperficiei ſuperioris. Quoniam vero in experientiam non vocaui, niſi corpora, quae conſtant ex materia homogenea et ſunt figurae priſmaticae; centrum ipſum grauitatis in medio huius inuenti axis, ad ſuperficiem ſuperiorem perpendicularis, tuto aſſumere licet.

§. 11. Ad determinandam frictionem horizontalem horum corporum adhibui planum, in ſitum horizontalem prius exactiſſime redactum. Huic impoſui corpus, illique ope cerae agglutinaui ex parte propiori baſi filum ſericum tenue, recta protenſum, et horizontaliter exiens, trochleamque mobiliſſimam, in extremo plani firmatam, ambiens et lancem affixam ſibi gerens; huic deinde lanci tot ſucceſſiue ponduſcula impoſui, donec ea iamiam inciperent quietem corporis plano impoſiti ſollicitare; quae ponduſcula vna cum pondere lancis pro menſura frictionis horizontalis tenui.

§ 12. Vt igitur ratio reddatur experimenti I. ſupra allegati, in quo corpus, cuius linea directionis manifeſto cadit extra baſin, rependo tamen deſcendit: aſſumo regulam inuentam, in qua pro reptione corporis requiritur tantum, vt ſit $F < \frac{EF}{CE} P$. Sunt autem pro quolibet corpore et rectae EF, CE, et frictio horizontalis F eaedem, pendentes nempe illae a ſitu centri grauitatis verſus baſin, neque hic in computum cadit recta FG, quae lineam directionis definit. Poterit igitur planum BD eovsque pro lubitu eleuari, impoſito corpore quocunque, donec tandem huius linea directionis extra baſin cadat, neque idcirco valor ipſius $\frac{EF}{CE} \times P$ mutabitur. Si enim in minima plani eleuatione eſt $F < \frac{EF}{CE} \times P$, aut $F > \frac{EF}{CE} \times P$, in maxima eleuatione et in omnibus intermediis res eodem modo ſe habebit; vnde ſimul etiam cauſa patet experimenti IV, ſuperius adducti; quod, etſi mirum ab initio videatur, ex hac tamen theoria prono alueo fluit et deriuatur. Ex eadem hac regula, quae caſum reptionis definit, deducitur quoque facile experimentum III, antea allatum. Cum enim pro reptione requiratur $F < \frac{EF}{CE} \times P$, et haec poſterior quantitas pro dato corpore maneat conſtans: poterit, aucta aſperitate plani, quod per varios pannos diuerſae texturae ſucceſſiue ipſi impoſitos fit, frictio horizontalis ita tandem augeri, vt deſinat eſſe $F < \frac{EF}{CE} \times P$, ſed contrarium accidat, quo obtento rotatorius motus conſequitur. Neque difficilius explicatu eſt experimentum II. Cum enim, vti ſupra iam dixi, §. 7. per potentiam, quae protrahit baſin, corpus ſe motui rotatorio ſingulis momentis quaſi ſubducat: euidens eſt, fieri debere,

debere, vt, potentia protrahente baſin per obſtaculum transuerſum fixum penitus exhauſta, motus rotatorius vim ſuam exerceat eo liberius, atque proinde corpus pronum in caput prolabatur, eo modo, qui in ſimilibus corporibus plano horizontali inſiſtentibus contingere ſolet.

§. 13. Praemiſſis hiſce generalioribus deſcendam nunc ad magis particularia, in ſequentibus exponenda et ope eiusdem huius regulae explicanda. Igitur *corpus ligneum C, quod horizontali plano impoſitum eadem baſe, qua hic plano inclinato incumbit, tutum erat a lapſu, rependo deſcendit in omnibus inclinationibus, quantumuis linea directionis extra baſin cadat, per plana laeuigata, buxinum, chartaceum et quernum; ſed per planum aſperum panni vulgaris rotando curſum abſoluit ſuum.* Inſtituta dimenſione determinationum neceſſariarum deprehendi eius pondus abſolutum, ſeu P, = 1277 Granorum, quorum 7680 faciunt libram amſtelodamenſem; CE = 51 partium, quarum 382 faciunt pedem londinenſem, EF = 18 part. Porro inueni frictionem horizontalem in plano buxino 346 Gran. in chartaceo 316 Gr. in querno 350 Gr. in panno aſpero autem 716 Gr. Igitur in hoc corpore erat $\frac{EF}{CE} \times P = 450$. Eſt hinc in primis tribus planis F, hoc eſt, 346 aut 316 vel 350 $<$ 450; quare in his planis obtinuit motus reptorius. In panno aſpero autem fuit F = 716 $>$ 450, quare in hoc corpus deſcendit rotando. Exper. V. Tab. V. Fig. 1.

§. 14. Sed multo adhuc melius theoriam hanc comprobat experimentum ſequens, quod in hunc finem ita perfeci. *Corpus ligneum C, quod horizonti inſiſtens lapſui* Exper. VI.

 reſi- Fig. 2.

reſiſtere non poterat, *rotando deſcendit in omnibus inclinationibus planorum modo memoratorum*, *buxini*, *chartacei*, *et querni.* Captis menſuris inueni in eo P = 1207 Gr. CE = 53 part. EF = 0; frictionem horizontalem vero inueni huius baſeos in plano buxino 245 Gr. in chartaceo 136 Gr. in querno 296 Gr. Igitur in hoc corpore erat $\frac{EF}{CE} \times P = 0$, et conſequenter in enumeratis planis omnibus erat $F > \frac{EF}{CE} \times P$; quare rotando deſcendit corpus.

Exper. VII. Fig. 3. §. 15. *Idem autem corpus modo memoratum*, *plano inclinato ſitu tantum inverſo impoſitum*, *rependo deſcendebat per buxum*, *chartam et quercum.* In hoc caſu eſt vti antea CE = 53, EF = 32, reliqua autem manent vti in experimento praecedente. Quare nunc habebitur $\frac{EF}{CE} \times P = 728$ gr. Eſt itaque F = 245 vel 136 aut 296 < 728, veluti hoc facta reptio poſtulavit. Patet igitur ex hoc et praecendente experimento, poſſe eandem baſin modo rependo, modo rotando devehere corpus ſibi impoſitum, prouti ſitum ea acquirit, qui huic aut alteri motui fuerit conueniens.

§. 16. Examinaui deinde corpus prismaticum octogonum ligneum, transuerſim plano inclinato impoſitum, Exper. VIII. Fig. 4. *quod obſeruaui repere in quercu*, *et rotari in panno aſpero.* In illa frictio horizontalis lateris repentis erat 296 gr. in hoc autem lateris rotati 700 gr. et porro erat CE = 31, EF = 13, P = 1661, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 696$ gr. At vero in caſu experimenti primo eſt F = 296 < 696, hinc corpus motum reptorium ſequebatur, in altero vero caſu eſt F = 700 > 696, hinc corpus motui rotatorio obediuit.

§. 17.

§. 17. *Cubum tiliaceum obſeruaui repere in quercu, ſed rotari in panno aſpero.* In illa erat frictio horizontalis 656, in hoc 2036. C E = E F = 42, P = 1940 $= \frac{EF}{CE} \times P$. Cum itaque in quercu ſit F = 656 < 1940, haec reptionem effecit. In hoc autem eſt F = 2036 > 1940, igitur motus rotatorius conſequebatur. Exper. IX. Fig. 5.

§. 18. *Adhibui cubum vitreum politiſſimum, qui in plano querno rependo deſcendit.* Erat in hoc P = 9369 gr. C E = E F = 37 part. et frictio horizontalis = 1556 gr. Cum itaque hic ſit F = 1556 < 9369, neceſſe eſt, vt motus reptorius obtineat. Exper. X. Fig. 5.

§. 19. *Parallelepipedum vitreum, hedra ſua minori quadrata planis impoſitum, in quercu repebat, in panno rotabatur.* Erat in hoc P = 3486 gr. C E = 47, E F = 20, hinc $\frac{EF}{CE} \times P$ = 1483 Frictionem horizontalem obſeruaui in quercu 1136, in qua repebat, quia 1136 < 1483. Sed in panno inuenta fuit frictio horizontalis 1556 > 1483, hinc in panno rotabatur. Exper. XI. Fig. 6.

§. 20. *Idem parallelepipedum vitreum, hedra ſua maiori, rectangula, planis impoſitum, in quercu repſit, et in panno.* Erat enim, vti ante, P = 3486, CE = E F = 20, hinc $\frac{EF}{CE} \times$P = 3486, et conſequenter in quercu F = 1106 < 3486; nec non in panno F = 1496 < 3486 Exper. XII. Fig. 5.

§. 21. *Aliud parallelepipedum vitreum, minus quam praecedens, iterum hedra ſua minori, quadrata, planis impoſitum, in quercu rependo, in panno rotando, deſcendit.* Menſuras ineundo deprehendi P = 1774, C E = 42, E F = 15, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 633$, et frictio horizontalis erat in Exper. XIII. Fig. 6.

in plano querno $= 506$, ſupra pannum autem 686. Igitur, quia in quercu $F = 506 < 633$, hic rependo deſcendit. Sed quia in plano panneo fuit $F = 686 > 633$, in hoc rotabatur.

Exper. XIV. Fig. 5. §. 22. *Idem parallelepipedum vitreum minus impoſui nunc hedra ſua maiori rectangula plano querno et panneo, et vidi, in vtroque illud rependo deſcendere.* Erat enim, vt ante, $P = 1774$, $CE = EF = 15$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 1774$; et deprehenſa fuit frictio horizontalis in illo $= 536$, in hoc autem $= 746$, quare in vtroque $F = 536$ vel $746 < 1774$, vnde motus reptorius in vtroque plano corpori huic vitreo placuit.

§. 23. Quoniam autem adhibui pannum rudiorem, laneum, ex filis craſſioribus contextum et hirtum, aliquoties obſeruaui, dari in eo circa corpora leuiora exceptiones quasdam, niſi ſumma cautio adhibeatur, pilis prominentibus elaſticis ſine dubio adſcribendas, quia hi pili extantes, elaſtici, in corpus non ſatis ponderoſum ſatis efficaciter, illud eleuando, agere poſſunt. Ita ex. gr. vidi, *corpus ligneum*, quod ſuperiori experimento V. in §.
Exper. XV. Fig. 7. 13. allegato inſeruierat, *plano horizontali ligneo aut alteri glabro*, AB, *impoſitum in ſitu* DCE *vel* dce *ſupra baſin* CD *quieſcere*; *ſimilibus vero modis panno allegato impoſitum, in vtroque caſu in faciem* CE, *aut* ce, *procumbere.* Quod certe phaenomenum, ſatis paradoxum, nulli alteri cauſae, quam modo memoratis fibris extantibus elaſticis panni rudioris adſcribere poſſum.

§. 24. Patet itaque ex omnibus his experimentis, ea theoriam et menſuram ſuperius expoſitam confirmare quam pulcher-

pulcherrime, ita, vt nullus dubitem, eam naturae atque eius operationibus in hoc negotio eſſe conformem. Patet etiam exinde per ſe, *corpora omnia ſphaerica et cylindrica, transuerſim plano cuicunque, etiam minimae aſperitatis, impoſita, rotando deſcendere.* Fit enim in his omnibus $EF = 0$; quare ſi vel minimam frictionem horizontalem habeat tale corpus, erit ſemper $F > \frac{EF}{CE} \times P = 0$, prouti hoc motus rotatorius requirit. Exper XVI. Fig. 8

§. 25. Si vero quaeſtio ſit de plano et corpore impoſito, perfecte politis et omnis frictionis expertibus, ne tum quidem theoria hucusque vſitata phaenomenis ſatisfacere poteſt. Requiritur enim pro motu rotatorio, vt ſit $F > \frac{EF}{CE} \times P$; ergo ſi $F = 0$, requiritur vt ſit $0 > \frac{EF}{CE} \times P$ quod aliter fieri nequit, niſi, ſi EF fiat negatiua, hoc eſt, niſi cadat in alteram oppoſitam partem reſpectu puncti E. At vero tum recta CE vel linea *appreſſionis* cadit extra baſin corporis FI. Sin itaque pro plano perfecte polito regula ſit accommodanda, reſpici debet ad lineam appreſſionis, non vero ad lineam directionis; in plano autem ſolo horizontali coincidunt lineae directionis et appreſſionis. Conſequenter *in plano inclinato perfecte polito corpus deſcendit rotando, ſi linea appreſſionis cadit extra baſin; deſcendit vero rependo, ſi linea appreſſionis cadat intra baſin corporis.* Neque adeo, ſi et planum inclinatum et baſis corporis impoſiti perfecte polita forent, corpus ſemper rependo deſcenſurum eſſet. Tab. IV. Fig. 7. Tab. V. Fig. 9.

§. 26. Poſtquam communicaſſem hoc problema cum Cel. *Dan. Bernoulli*, Academiae noſtrae Membro meritiſſimo,

 per

perſcripſit is beneuole ad me ſolutionem ſuam, quae principiis quidem paulo diuerſis a meis vtitur, ſed cum concluſione mea plane coincidit, quam proinde honoris cauſa hic recenſebo, ſed redactam in compendium. Solutio Fig. 10. Celeb. viri *ex epiſtola d. d. Baſileae 6. Aug.* 1740 huc redit. Sit A B horizontalis, A C verticalis, C B ſectio plani inclinati, D F ſectio baſis corporis in plano inclinato, centrum grauitatis corporis in plano inclinato, centrum grauitatis corporis in H, verticalis, ſiue linea directionis, H G, quae ſimul exprimat pondus corporis abſolutum. Reſoluatur H G in H L et H E, potentias laterales, illam parallelam, hanc perpendicularem plano inclinato. His poſitis erit in F, vbi baſis corporis impoſiti deſinit, vel obſtaculum aliquod inuincilibe, quod corpus ſiſtat quidem, ſed non impediat quin prolabatur, vel non aderit tale retinaculum. Sin adfuerit tale obſtaculum, tunc palam eſt futurum eſſe, vt potentia H L multiplicata per ſuum vectem H E conetur corpus voluere; et potentia H E, multiplicata per ſuum vectem E F, conetur corpus in ſitu ſuo ſeruare: ſequitur hinc, corpus prolapſurum eſſe, ſi fuerit $HL \times HE > EF \times HE$, aut $EG > EF$, hoc eſt, ſi linea directionis ceciderit extra baſin D F. Sed e contrario corpus in ſitu ſuo manebit, ſi fuerit $EF \times HE > HL \times HE$, aut $EF > EG$, hoc eſt, ſi linea directionis ceciderit intra baſin corporis D F. Vnde concludit Vir celeberr. factum fuiſſe, vt hac proprietate auctores quidam abuſi ſtatuerint, eandem quoque obtinere, ſi corpus ab obſtaculo inuincibili non retineatur, ſed actu deſcendat.

§. 27. In altero autem caſu, ſi obſtaculum nullum adſit, quod deſcenſum impediat, rem aliter ſe habere con-

concludit. Namque tum potentiam HL duplicem habere effectum, quorum vnus conatur, vt antea, ſubuertere corpus, alter vero accelerare corpus. Si igitur iam frictio omnis abſit, fore vt vis accelerans ſola praepolleat, neque vnquam corpus rotari poſit. Si vero frictio detur in plano, ſubire illam vicem alicuius retinaculi firmi, atque ſic potentiam HL actu diuidi in accelerantem et ſubvertentem; et poſita frictione horizontali $=R$, eſſe vim acceleratricem $=HL-\frac{AB}{CB}\times R$, et vim ſubuertentem $=$ HL minutae vi acceleratrice, vel $=HL-HL+\frac{AB}{CB}\times R = \frac{AB}{CB}\times R$. Itaque porro momentum potentiae rotatoriae vel ſubuertentis eſſe $=\frac{AB.HE}{CB}\times R=\frac{HE^2}{HG}\times R$; ſed momentum potentiae contrariae $=HE\times EF$. Vnde deducitur, corpus repere, ſi fuerit $HE\times EF > \frac{HE^2}{HG}\times R$, aut $\frac{EF}{HE}\times P > R$; rotari vero et repere ſimul, ſi contrarium accidat, quo in caſu oriatur motus mixtus ex reptorio et rotatorio, etiam in ipſis ſphaeris deſcendentibus. Monet tandem Vir acutiſſimus, haec omnia ita ſe habere, ſi frictio ponatur conſtanter eadem et vniformis, neque dependens a velocitate corporis; ſi vero haec ita ſe non habeat, intelligi debere per R frictionem horizontalem corporis, ea velocitate moti, quam ſuper plano inclinato deſcendens habet in dato loco.

DE VIRIBVS ATTRACTIONIS MAGNETICAE EXPERIMENTA.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1

Quod ferrum trahat magnes, occulta ac ne hodie quidem detecta ratione, Thaleti Mileſio iam cognitum fuiſſe perhibet Ariſtoteles de anima lib. I. cap. 2. adeoque mirandi huius effectus cognitio aetatem ſuam deducit ab ipſis philoſophiae naturalis initiis. Deriuata ad nos eſt per longinquam aetatum ſeriem huius phaenomeni notitia magis, quam ſcientia, cum nemo repertus fuerit, qui regulas et leges, quas tenet, induſtria perueſtigatione eruere conaretur, vsque ad haec noſtra tempora, in quibus demum ea cura animos inceſſit, vt in menſuram attractionis magneticae inquirerent. Cum itaque leui experimento conſtare poſſit, ferrum validiſſime attrahi a magnete in immediato vtriusque contactu, debilius in aliquo vnius ab altero interuallo, et tandem plane non, in diſtantia nimis remota: videtur exinde certe hoc patere, attractionis huius vim habere legem in mutua horum corporum a ſe inuicem diſtantia fundatam; quaenam vero ſit illa lex, aut quaenam comparatio diſtantiarum, attractionis magnitudinem indicans, id experimentis ſolertiſſime inſtitutis definiendum quidem eſſet, ſed nondum definitum eſt.

§. 2.

§. 2. Imperfectioni certe huius disquiſitionis adſcribi debet, quod facile ſit catalogum texere illorum, qui experimenta huic vſui inſeruientia inſtituerunt atque iis attractiones magneticas ad menſuras ſuas reuocare ſtuduerunt. Oſtendunt monumenta Societatis Regiae Anglicae, primos ibi labores huic rei inſumtos fuiſſe, atque *Hauksbeium*, optime gnarum, quantum ad proprietates magnetis referat, ſcire proportionem virium attractricium ad diuerſa interualla, diligentiſſime captis experimentis huic ſtudio incubuiſſe. Methodus ab ipſo adhibita his obſeruationibus iuſſu Societatis Regiae emendata fuit a *Tayloro*, et denuo magis perfecta a *Whiſtono*, qui reperiſſe ſibi viſus eſt, ſequi has attractiones quam proxime rationem diſtantiarum ſesquiduplicatam, vel, poſita diſtantia magnetis et ferri $= d$, quantitate conſtante $= \alpha$, eſſe attractiones magneticas inter ſe vti $\frac{\alpha}{a^{-\frac{1}{2}}}$. *Taylorus* vero, ſuis innixus tentaminibus, deprehendit, easdem attractiones non eſſe vti $\frac{\alpha}{a^2}$, neque vti $\frac{\alpha}{a^3}$, quae omnia leguntur in Tranſact. anglicanis Nr. 368. *Newtonus* ex captis quibusdam a ſe experimentis ſtatuit, decreſcere attractionem hanc in ratione fere triplicata diſtantiae in receſſu a magnete, vel eſſe eam vti $\frac{-\alpha}{d^3}$, in princip. p. 368.

§. 3. Omnibus autem in ſedula huius rei indagatione palmam praeripuit hodie Celeberr. Petrus van *Muſchenbroek*, qui in eximia diſſertatione phyſica experimentali de magnete nulli operae neque labori pepercit, vt experimentis prudentiſſime inſtitutis veram huius negotii legem et proportionem, naturae operationibus conformem, deprehenderet. Poſtquam vero omnem lapidem mouiſſet, fateri

tandem coactus eſt, nullam ſe inueniſſe diſtantiarum functionem, quae proportionem attractionis exhiberet; neque etiam fieri attractionem ferri ad magnetem in proportione aliqua magnitudinis ſuperficiei, quae magneti opponitur. Tandem autem in edito hoc anno opere praeclariſſimo, *Eſſai de Phyſique* pag. 280. detexit, dari aliquam inter attractiones duarum ſphaerarum, magneticae et ferreae, aequalium proportionem, easque eſſe in ratione inuerſa quadruplicata ſpatiorum cauorum, quae interpoſita ſint ſucceſſiue inter vtramque ſphaeram. Vt ſi ſint
Tab. VI. fig. I. duae ſphaerae aequales, magnetica A B et ferrea C D, eſſe attractionem magneticam pro diuerſis diſtantiis E F in ratione inuerſa quadruplicata ſpatii interpoſiti cylindracei A C F D B E. Quam regulam haud ſane inconcinnam, experimento, quod ibidem affert, optime probat in duabus ſphaerulis aequalibus, quarum diameter erat o, 95 pollicis londinenſis duodecimalis.

§. 4. Quam primum itaque mihi nobile hoc inuentum innotuit, ſtatim ingens cupido animum meum inceſſit, id variis nouis experimentis examinandi atque inquirendi, an veritas vbique hic ſibi conſtet; an haec proprietas ad ſphaeras inaequales ſe extendat; an in duabus ſphaeris magneticis quoque obtineat, nec ne. Adhibui itaque ſequentem methodum, vt in tabula, ex qua omne ferramentum remoui, ſuſpenderem bilancem exactiſſimam, eo plane modo, qui in celeb. *Graueſandii* phyſices elementis mathematicis ad vſus hydroſtaticos Tab. XXVII. figura *l* depingitur et deſcribitur. Cepi deinde tres globos, magneticos duos, ferreum vnum, de quibus in ſequen-

quentibus ſermo occurret, quorum dimenſiones ſunt ſequentes in partibus, quarum 120 efficiunt pedem londinenſem. Erat nimirum globi magnetici maioris pondus $1726\frac{1}{2}$ granorum talium, quorum 7680 efficiunt libram hollandicam, diameter autem 14 part. ante memoratarum. Globi denique ferrei, qui magnetico maiori aequalis eſt, pondus deprehendi $2798\frac{1}{2}$ Gran. et diametrum eandem cum priori, nempe 14 part. Vbi obiter tantum hoc adiicio, me occaſione horum globorum indagaſſe quoque methodo conſueta hydroſtatica magnetum a me adhibitorum, qui ex metallifodinis ſibiricis allati ad nos ſunt, denſitatem, quam fruſtra in tabulis huic ſcopo conditis quaeſiui, eamque inueniſſe in vno eorum 4, 806, in altero 4, 778 poſita aquae purae denſitate 1, 000. Fuerunt hi globi omnes extus exacte laeuigati, et materiae ad ſenſum bene homogeneae; quod idcirco adnoto, quia primo facto tentamine, in quo globus ferreus ſuperficiem nondum ſatis politam tenebat, aliae prodierunt attractiones, regulae allegatae non conuenientes.

§. 5. Poſtmodum igitur, ſuſpenſo ex vna lance magnetico globo, ita vt axis eius verticalis eſſet, impoſui alteri lanci tot ponduſcula, quot requirebantur ad exactisſimum aequilibrium reſtituendum in bilance. Quo obtento auxi haec ponduſcula dimidio grano, vno, et ſucceſſiue pluribus granis, ex quo noua praeponderatio lancis ponderibus onuſtae ſequebatur. Tum vero leniter demiſi integram bilancem ope funiculorum, quibus ſuſpenſa eſt, eamque tamdiu magis magisque ſuppoſito verticaliter globo ferreo admoui, donec vltima haec facta praeponderatio

ratio attractionis vi rediret ad priſtinum aequilibrium Deinde diſtantiam inter ſummitates vtriusque globi dimenſus ſum circino, qui totus ex orichalco confectus eſt; atque ſimul ſemper caui, vt ne contingerent ſe hi duo globi, durante primo experimento, vtque ſic ferrum illibatum et magnetica vi nulla imbutum tenerem. Diſcrepat itaque in aliquibus circumſtantiis haec mea operatio à musſchenbroekiana, ſed hac ratione mihi viſus ſum optime inſtitutum meum poſſe peragere.

§. 6. Aſſidua igitur patientia et multo labore obtinui ſequentes obſeruationes, quas nunc ſuo quamque ordine recenſebo; poſtquam hoc vnicum adhuc adnotauero, globum ferreum poſt peractum primum experimentum adhaeſiſſe quidem magneti: ſed tam parum exinde recepit virium, vt in ſcobe ferrea volutus fere nihil huius attraxerit. Igitur *primo* 1740 Febr. 24, ſt. v. poſt meridiem ſuſpendi globum magneticum maiorem ex bilance, ſic, vt polus eius boreus ferrum reſpiceret, illique ſuppoſui ferreum aequalem in linea verticali, atque ſic ſequentes obtinui numeros:

Obſeruatio	Diſtantiae Globor.	Attractiones
I - - -	$8\frac{3}{5}$ part. - - -	$\frac{1}{2}$ Granum
II - - -	6 —— - - -	1
III - - -	$4\frac{4}{5}$ —— - - -	2
IV - - -	$3\frac{4}{5}$ —— - - -	3
V - - -	3 —— - - -	4
VI - - -	$2\frac{4}{5}$ —— - - -	5
VII - -	0 —— - - -	1977

Secundo

Secundo deinde ſimile experimentum feci cum ſphaera magnetica minore, cuius polus boreus deorſum ſpectabat, et cum eodem, quo prius, globo ferreo; vt deinde eruere poſſim, an eadem memorata proportio locum quoque obtineat inter duas ſphaeras inaequales. Hic inueni Iulii 10, ante merid. ſequentia:

Obſeruatio	Diſtantiae Globor.	Attractiones
I	- - - $14\frac{1}{2}$ part	- - - $\frac{3}{4}$ Gran.
II	- - - 9	- - - - 1 - -
III	- - - 4	- - - - 2 - -
IV	- - - 2	- - - - 3 - -
V	- - - 0	- - - - 67 - -

Tertio iterum adhibui Auguſti 30. ante merid. ſphaeram magneticam minorem, in qua nunc polus boreus ſurſum ſpectabat, et ferream eandem, atque deprehendi haec:

Obſeruatio	Diſtantiae Globor.	Attractiones
I	- - - 4 part.	- - - 1 Gran
II	- - - 3	—— - - - $1\frac{1}{2}$
III	- - 2	—— - - - 2
IV	- - $1\frac{3}{5}$	—— - - - 3
V	- - 0	—— - - - 50

Quarto denique, Auguſti 30. poſt merid. examinaui vtramque ſphaeram magneticam, minorem ſic ex balance ſuſpenſam, vt polus boreus ſurſum ſpectaret, et maiorem ita locatam, vt polus huius boreus etiam ſurſum ſpectaret, atque ſic poli amici ſe reſpicerent; quo facto ſequentem tabulam erui:

Obſeruatio	Diſtantiae Globor.		Attractiones
I - - -	$27\frac{1}{2}$ part.	- - -	$\frac{1}{2}$ Gran.
II - - -	14	—— - - -	1
III - -	$11\frac{1}{3}$	—— - - -	$1\frac{1}{2}$
IV - -	$9\frac{1}{2}$	—— - - -	2
V - -	8	—— - - -	$2\frac{1}{2}$
VI - -	$7\frac{3}{5}$	—— - - -	3
VII -	$6\frac{1}{2}$	—— - - -	4
VIII -	5	—— - - -	5
IX -	4	—— - - -	6
X -	0	—— - - -	134

§. 7. Vt nunc ex his captis experimentis veritatem regulae muſſchenbroeckianae eruamus, via nobis antea praeſternenda eſt ſequentibus duobus problematibus geometricis; quorum primum, etiamſi ab *Archimede* iam ſolutum reperiatur, ſequenti modo explicatum dabo. Quaeritur ſoliditas ſegmenti ſphaerici FEGD. Sit hunc in finem ratio radii ad peripheriam $= 1:p$, $EP = x$, $PM = y$, $CE = q$, $CB = e$, $ED = f$; erit $CP = q + x$, et peripheria radio PM deſcripta $= py$, area huius circuli $= \frac{py^2}{2}$, et elementum ſegmenti ſphaerici $= \frac{py^2dx}{2}$. Cum autem ſit $CP^2 + PM^2 = CM^2$, habebitur $q^2 + 2qx + x^2 + y^2 = e^2$, aut $y^2 = e^2 - q^2 - 2qx - x^2$, atque adeo $\frac{py^2dx}{2} = \frac{pe^2dx}{2} - \frac{pq^2dx}{2} - \frac{2pqxdx}{2} - \frac{px^2dx}{2}$, et conſequenter integrando habebitur $\int\frac{py^2dx}{2} = \frac{pe^2x}{2} - \frac{pq^2x}{2} - \frac{pqx^2}{2} - \frac{px^3}{6}$; abeat nunc x in $FD = f$, orietur ſoliditas ſegmenti ſphaerici $FEGD = \frac{pf}{2}(e^2 - q^2) - \frac{pqf^2}{2} - \frac{pf^3}{6}$; vel, quia $q = e - f$, habebitur eadem ſoliditas $= \frac{pf^2(\ e-f)}{6}$.

§. 8.

§. 8. Sint nunc porro duae ſphaerae, maior FKEI et minor DHBO, diſtantia HI inter ſe remotae, quaeritur ſpatium cauum interceptum, quod formant hae duae ſphaerae, FIEBHD. Ponantur iterum ratio radii ad peripheriam $= 1 : p$, $KE = R$, $CB = r$, $HI = a$, ſinus totus $= 1$, anguli LEA ſinus $= s$ coſ. $= c$; eritque diſtantia centrorum $CK = R + r + a$. Ex figura ſatis patet, ſimilia eſſe triangula LKE, LEA, GCB et GBA; quare locum inuenient ſequentes analogiae; nempe: $1 : R = s : LE = sR$; $c : sR = s : LA = \frac{s^2 R}{c}$; nec non; $1 : r = s : GB = sr$, et $c : sr = s : GA = \frac{s^2 r}{c}$; cum praeterea ſit radii LE peripheria $= psR$, area huius circuli $= \frac{ps^2 R^2}{2}$, orietur coni FEA ſoliditas $= \frac{ps^4 R^3}{6c}$, et ſimili ratione coni DBA ſoliditas $= \frac{ps^4 r^3}{6c}$; vnde habebitur conus truncatus $FEBD = \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3)$. Reſtant iam indaganda adhuc duo ſegmenta ſphaerica FEI et DHB, quae auferenda adhuc erant ab inuento cono truncato, vt obtineatur tandem quaeſitum ſpatium cauum FIEBHD. Inuenietur itaque ex praemiſſo lemmate geometrico ſoliditas $FEI = p . \frac{LI^2 (3R - LI)}{6}, = \frac{p \cdot \overline{1-c}^2 . R^3 (2+c)}{6}; = \frac{p R^3 (2 - 3c + c^3)}{6}$ et ſoliditas $DHB = \frac{p . GH^2 (3r - GH)}{6} = \frac{p \cdot \overline{1+c}^2 . r^3 (2-c)}{6} = \frac{pr^3 (2 + 3c - c^3)}{6}$. Eruetur hinc ſpatium cauum quaeſitum $= \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{pR^3 (2 - 3c + c^3)}{6} - \frac{pr^3 (2 + 3c - c^3)}{6} = \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2pR^3}{6} - \frac{2pr^3}{6} + \frac{3c - c^3}{6} pR^3 - \frac{3c - c^3}{6} pr^3 = \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3) + \frac{(3c^2 - c^4)p}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2p}{6}(R^3 + r^3) = \frac{p(s^4 + 3c^2 - c^4)}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2p}{6}(R^3 + r^3) = \frac{p(1 + cc)}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2p}{6}(R^3 + r^3)$, ſubſtituto valore ipſius $s^4 = 1 - 2c^2 + c^4$. Ducatur ex C recta CN, quae ſit

paral-

parallela ipſi AE, erit apud N angulus rectus, et in triangulo KNC erit KC $(R+r+a)$: ſin. tot. $(1) = KN$ $(R-r)$: ſin. KCN (c), vt adeo valor ipſius c ſit $= \frac{R-r}{R+r+a}$.

§. 9. Eſt itaque ſoliditas ſpatii caui inter duos globos inaequales $= \frac{p.\overline{1+cc}.(R^3-r^3)}{6c} - \frac{p(R^3+r^3)}{3}$, ex qua formula difficilis eſt applicatio ad eum caſum, quo globi ponuntur aequales, quia poni debet in hoc caſu $c = 0$ et $R = r$. Subſtituatur ergo in inuenta expreſſione valor ipſius c modo inuentus, obtinebitur ſoliditas caui

$$= \frac{p(2R^2+2r^2+2aR+2ar+a^2)}{6(R+r+a)(R-r)}(R^3-r^3) - \frac{p(R^3+r^3)}{3};$$

facta nunc diuiſione actuali per $R-r$, oritur idem cauum

$$= \frac{p(2R^2+2r^2+2aR+2ar+a^2)(R^2+Rr+r^2)}{6(R+r+a} - \frac{p(R^3+r^3)}{3}.$$

et multiplicatione actu inſtituta, facta reductione ad eandem denominationem, et abiectis quantitatibus, quae ſe deſtruunt, fit tandem, vltima aequatione prodeunte in factores rurſus ſoluta, $\frac{6 \times \mathit{ſolidit.\ caui}}{p} = \frac{r^2(4R^2+a^2)+aR(a+4r)(R+r)}{R+r+a}$, quam expreſſionem indigitabo vnica litera, et ponam $= M$.

§. 10. Si deinde accidat, vt ſit $R = r$, in caſu ſphaerarum aequalium, obtinebitnr facile $\frac{6 \times \mathit{ſolid.\ caui}}{p} = \frac{(4r^2+8ar+3a^2)r^2}{2r+2}$, et diuiſione actu inſtituta $\frac{6 \times \mathit{ſolid.\ caui}}{p} = (2r+3a)r^2$. Eſt vero hic pro omnibus diſtantiis ſoliditas caui vti $2r+3a$, ob r^2 vbique idem, quare in hoc caſu erit $2r+3a = M$, et aſſumta conſtante α, experimento vnico definienda, erit attractio magnetica

=

$= \frac{\alpha}{M^4}$, vbi loco ipſius M numeri caſuum alterutri reſpondentes debebunt adhiberi.

§. 11. Subducto nunc calculo numerico, ſatis moleſto quidem, inueni ſequentia, quae hac tabula continentur:

Experim.			diſt.	M.	attr. obſerv.	attr. theoriae
I	caſus	1	$8\frac{3}{5}$	$39\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		2	$6\frac{3}{10}$	$32\frac{9}{10}$	1	$1\frac{7}{100}$
		3	$4\frac{4}{5}$	$28\frac{2}{5}$	2	$1\frac{93}{100}$
		4	$3\frac{4}{5}$	$25\frac{2}{5}$	3	$3\frac{1}{100}$
		5	$3\frac{1}{5}$	$23\frac{3}{5}$	4	$4\frac{4}{100}$
		6	$2\frac{4}{5}$	$22\frac{2}{5}$	5	$4\frac{98}{100}$
		7	0	14	1977	$32\frac{65}{100}$
II	caſus	1	$14\frac{1}{2}$	2594	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
		2	9	1843	1	2,94
		3	4	1159	2	18,82
		4	2	886	3	55,10
		5	0	613	67	240,40
III.	caſus	1	4	1159	1	1
		2	3	1023	$1\frac{1}{2}$	1,65
		3	2	886	2	2,93
		4	$1\frac{3}{5}$	832	3	3,76
		5	0	614	50	12,69
IV.	caſus	1	$27\frac{1}{2}$	4372	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		2	14	2526	1	4,49
		3	$11\frac{1}{2}$	2184	$1\frac{1}{2}$	8,03
		4	$9\frac{1}{2}$	1911	2	13,69
		5	8	1706	$2\frac{1}{2}$	21,56

6	$7\frac{3}{5}$	1651	3	24,59
7	$6\frac{1}{2}$	1501	4	35,98
8	5	1296	5	64,75
9	4	1159	6	101,20
10	0	613	134	1293,00

Nempe pro experimento quocunque expoſitorum, ex datis radiis ſphaerarum et earum qualibet diſtantia ſubduxi ex paragrapho 9 et 10 valorem ipſius M, et cum attractio debeat eſſe $= \frac{\alpha}{M^4}$, erit logarithmus attractionis $= l\,\alpha - 4\,l\,M$, vbi $l\,\alpha$ in quolibet experimento ex primo eius caſu determinatur.

§. 13. Apparet nunc facile ex comparatione tabulae huius vltimae, experimentum primum ita conſpirare cum theoria muſſchenbroekiana, vt melius non poſſit; de quo etiam caſu ſphaerarum nempe aequalium ſolo theorema hoc pronunciauit Vir ſagaciſſimus. Dubitari itaque non poteſt, obtinere allegatam muſſchenbroekianam proportionem attractionum magneticarum in caſu ſphaerarum aequalium, quamuis, vt verum fatear, a priori eam derivare ex vlla attractionum hypotheſi generali nequeam. Deinde id etiam incommodi ſecum fert haec theoria, quod attractiones mutui contactus ſphaerarum exhibeat nimis paruas. Nam ſaepius laudata haec theoria in experimento primo iubet attractionem eſſe in immediato vtriusque ſphaerae contactu fere 33 granorum, cum tamen 1977 Gran. obſeruata fuerit. Apparet vero porro etiam in caſu ſphaerarum inaequalium, ſiue vtraque ſphaera magnetica ſit, ſiue non, praefatam theoriam plane non ita comparatam eſſe, vt pro veroſimili tantum haberi poſſit, vbi dolendum certe eſt, peruicaciam quaſi

quaſi huius lapidis tantam eſſe, quae nullis legibus generalibus ſe adſtringi hucusque patiatur. Id tamen merito honoris cel. *Muſſchenbroekio* exinde accreſcit, quod in re tam difficili, atque in obſcuritate hac naturae hucusque indomita futuris ſeculis facem, quam ſequi tuto licet, ingenii ſui acrimonia et laborum conſtantia accenderit.

§. 13. Reuocabo nunc ad examen aliud experimentum, quod ipſe cel. *Muſſchenbroekius* inſtituit cum duobus globis magneticis inaequalibus, quorum vnius diameter erat $6\frac{1}{2}$ poll. londinenſ. ſiue 78 lin. alterius 18 lin. et quod legitur in diſſertatione de magnete cap. 1. p. 16. Abſoluto caſuum quorundam huius experimenti calculo, ſequens mihi enata eſt tabella.

diſtantia	M	attract. obſerv.	attr. theoriae
70 lin.	125253	$1\frac{1}{4}$ Gran.	$1\frac{1}{4}$
45	80433	3 —	7
28	51459	9 —	44
12	26379	23 —	634

Vnde rurſus patet, laudatiſſimam theoriam ad caſum globorum inaequalium non extendi.

DESCRIP-

DESCRIPTIO CASSIAE AMERICANAE PROCVMBENTIS, HERBACEAE, MIMOSAE FOLIIS, FLORIBVS PARVIS, SILIQVIS ANGVSTIS, PLANIS.

A. I. A.

Caſſias cum clariſſ. Tournefortio voco omnes plantas, quae floribus praeditae ſunt pentapetalis, quorum piſtillum abit in ſiliquam nunc teretem et cylindraceam, nunc compreſſam, in varia loculamenta diuiſam a diſſepimentis transuerſa poſitis, medulla quadam ſubinde obductis, foetam ſeminibus duris. His notis addi poteſt, quod petala florum fere ſemper diuerſae ſint magnitudinis et formae, quod ſtamina habeant vtplurimum decem variae longitudinis et formae; variis etiam apicibus onuſta.

Vix datur aliud plantarum genus, cuius ſpecies ſtatura, proceritate, creſcendi modo et fructu adeo inter ſe diuerſae ſunt; dantur enim arboreſcentes, dantur fruteſcentes vel erectae vel procumbentes perennes; dantur herbaceae annuaeque ſpecies; dantur Caſſiae fructu tereti cylindraceo pulpa quadam nigricante repletae; dantur fructu tereti et angulato duplici ſeminum ordine foeto; dantur etiam ſiliquis planis compreſſis; dantur denique ſiliquis articuloſis, qualem ante aliquot annos circa Campechy nouae Hiſpaniae vrbem detexit G. Houſtonus. Taceo folia, in quibus non minor differentia deprehenditur.

Ne vnica quidem pulchritudine et vſu medico inſignis huius generis ſpecies in Europa ſponte prouenit, ſed

ſed omnes fere americanae et aſiaticae ſunt originis, exceptis paucis Africae indigenis. Harum plurimae mihi ſunt aut penitus hactenus incognitae, aut non bene ab auctoribus deſcriptae. Hoc autem loco animus tantum eſt exhibere deſcriptionem vnicae ſed rarae admodum ſpeciei, quae maioris et clarioris diſtinctionis cauſſa ab aliis huius generis ſpeciebus a me ſic appellatur:

CASSIA americana procumbens, herbacea, Mimoſae foliis, floribus paruis, ſiliquis anguſtis, planis.

E radice albenti, valde fibroſa, cauliculus ſurgit admodum gracilis, teres, pedalis aut ſequipedalis, inferne purpuraſcens et parum hirſutus, ſuperne verſus extremitatem pallide viridis et glaber, mox ſupra radicem duos emittens ramos coniugatos, in terram reclinatos. Breui poſt hoſce ramos interuallo caulis in tres quatuor pluresue alios, aequalis fere longitudinis prioribusque per omnia ſimilis alterno ſemper ordine diuaricatur, ita, vt vix dignoſci poſſit, quinam proprie horum ramorum caulis ſit continuatio. Rami omnes teretes ſunt, hinc inde parum intorti, terram verſus inflexi vel humi plane procumbentes.

His ad vncialia praeter propter interualla alterno ordine folia adnaſcuntur ſeſcunciam, vncias duas aut tres ſubinde longa, pollicem ſiue ſeſquipollicem in medio lata, vtrinque anguſta et obtuſa, ex octo, nouem, decem, vndecim, duodecim aut tredecim, raro pluribus pinnarum coniugationibus compoſita, nulla cum impari coſtam claudente. Coſtae, quibus pinnae hae adhaerent, prope

 baſin

binis geniculatae ſunt, tenuiſſimae, hirſutae, ab altera parte gibbae, ab altera canaliculatae ſeu carinatae, ad exortum duabus auriculis paruis, anguſtis et valde acutis, ramisque appreſſis praeditae. Pinnae vero breviſſimis et vix conſpicuis pedunculis geniculatis inſident, ſuntque pollicis trientem aut dimidiam circiter vnciam latae, glabrae, ſi oculis nudis ſpectantur, parum ad oras praecipue hirſutae, ſi microſcopio armatis cernuntur, in tenuiſſimam ſpinulam inermem et mollem terminatae, ſuperne laete virides, inferne dilutiori colore ad glaucum vergente tinctae. Harum neruus non medium telae percurrit, ſed ad oras propius admouetur. Noctu folia clauſa ſunt, interdiu vero expanſa Mimoſarum aliarumque plantarum ad inſtar.

Flores non ex alis foliorum ſed ex lateribus ramorum ad duarum aut trium linearum ab illis diſtantiam, mox ſupra memoratarum auricularum mucrones, per totam fere ramorum longitudinem, in pediculis breuibus, lineam vnam aut alteram longis oriuntur, modo ſingulares, modo bini aut terni, exiles valde, vix duas aut tres lineas lati, pentapetali, roſacei, flaui, calyculis contenti e viridi flaueſcentibus, in quinque vt plurimum ſegmenta acutiſſima et inaequalia fiſſis. Petala diuerſae quoque ſunt magnitudinis, quorum quatuor fere aequalia, oblonga et obtuſa, interdui etiam vt plurimum clauſa, quintum et infimum, contra ac in plerisque Caſſiae ſpeciebus fieri ſolet, quatuor ſuperioribus triplo maius eſt, ſubrotundum, concauum.

E fundo calyculi piſtillum ſurgit oblongum, planum, dorſo et ventre viride et glabrum, ad latera piloſum et inca-

incanum, decem ſtaminibus paruis, magnitudinis et formae diuerſae, vt in congeneribus, circumdatum, quod progreſſu temporis in ſiliquam excreſcit planam, compreſſam, vnciam plus minus longam, duas circiter lineas latam, initio viridem, per maturitatem fuſcam, glabram vel parum admodum hirſutam, ex duabus membranis compoſitam, ſeminibusque foetam quinque aut ſex, compreſſis, laeuibus, nigricantibus et ſplendentibus, angulatis, tenuibus diſſepimentis inter ſe diſtinctis, nulla omnino pulpa obtectis.

Elegans haec planta in horto Academico ſuccreuit ex ſeminibus cum integris ſiliquis circa Philadelphiam vrbem in Penſyluania, Americae ſeptentrionalis prouincia, ſitam collectis, floruitque Iulio, Auguſto et Septembri menſibus. Quamuis primo ſemper a ſatu anno flores magna copia producat, fructus tamen raro maturat; cum floribus enim marcentibus eorum rudimenta vt plurimum ſimul delabuntur. Et ſi illorum aliquot augmentum capiunt, ob nimis breuem huius regionis aeſtatem ad plenam maturitatem non perueniunt. Ceterum notandum adhuc eſt, plantam, quam deſcripſi, in fictili enutritam fuiſſe. Illae quidem, quas ſolo fimi equini calore tepente plantaui, laetius creuerunt, folia et ramos plures atque maiores humi procumbentes obtinuerunt, flores autem nunquam multo minus fructus protulerunt. Hyeme vero omnes radicitus perierunt.

Eſt porro ſine dubio eadem planta, quae Chamaecriſta Mariana, flore minore Petiv. hort. ſicc. apud Rai. Hiſt. Plant. Tom. III. App. cuius ſpecimen ipſum, ex quo denominatio haec originem traxit, in muſaeo ſloaniano vidi. Icon ſennae ſpuriae virginianae, *Mimoſae* foliis, flo-

ribus paruis, nictitantibus, Pluk. Alm. Bot. Tab. 314. fig. 5. Si florum paruitatem et ſiliquarum formam ſpectes, ſatis ad plantam noſtram accedere videtur. Flores autem et ſiliquae in planta Plukenetiana ex alis foliorum egrediuntur, ſecus ac in noſtra; flores quoque omnes ſingulares pinguntur, cum in noſtra duo aut tres vt plurimum ab vno exortu enaſcantur; auriculae etiam baſin coſtarum ambientes ſimplices repraeſentantur, in noſtra vero duplices ſunt; foliorum pinnae longiores et latiores quoque ſunt, vtrinque obtuſae et aequalis ſere vbique latitudinis. Differt praeterea noſtra haec planta a Chamaecriſta Pauonia americana, ſiliqua multiplici Breyn. Cent. I. p. 66. Cap. XXIV, potiſſimum creſcendi et ramos emittendi modo; ſtatura maiori et erecta; pinnis foliorum paucioribus, iisque praecipue, quae in medio eorundem poſitae ſunt, longioribns et latioribus, in ſpinulam abeuntibus; florum denique ſtaminibus breuioribus.

DE

DE PHAENOMENIS PLVMBI FVSI IN TVBIS CAPILLARIBVS.

C. E. Gellert.

In doctrina de tubis capillaribus experimenta hactenus ſunt inſtituta circa corpora, quae perpetuam fluidatem prae ſe ferunt: quibus debito modo inſtitutis pro comperto affirmari poteſt, altitudines mercurii, infra libellam depreſſi, et omnium liquorum, ſupra eandem aſcendentium, eſſe in ratione reciproca diametrorum. Perpendens itaque metalla in vaſis puris fuſa ad modum referre argentum viuum et iſtud ideo a Chemiſtis dici metallum igne minimo fuſum, ſuſpicabar phaenomena metalli fuſi in tubis capillaribus ſimilia eis, quae in argento viuo reperiuntur, eſſe futura. Apud animum igitur ſtatuebam periculum facere, quo intelligerem, an experientia coniecturis meis ſit reſponſura. Nec ſpes me fefellit. Nam experimentis in plumbo captis obſeruaui haec quatuor phaenomena generaliora:

1) plumbum fuſum in tubo capillari ſemper ſubſiſtere ad altitudinem aliquam infra libellam metalli in vaſe contenti.

2) altitudinem iſtam eſſe propemodum in ratione reciproca diametrorum, propemodum dico, nam neque inaequalitatibus, licet ſint perexiguae, vllus tubus carere, neque eam ob cauſam diametrorum menſura, prout decet, inſtitui poteſt:

3) in tubis, qui non vbiuis aeque ſunt lati, pro diametro eius ſuperficiei, ad quam ſummitas plumbi in tubo pertingit, iſtud ſubſiſtere;

4) idem euenire in tubis figulinis.

Praecipua autem experimenta ſunt iſta.

Tab. VI. *Exp. I. fig.* 4.

Immerſi tubum capillarem vitreum AB in plumbum fuſum et ebulliens vsque ad D, intrauit quidem plumbum, ſed ſubſiſtebat ad altitudinem aliquam infra libellam, nempe in C; quo gracilioribus vſus ſum tubulis, eo maior erat iſta altitudo DC.

Exp. II. fig. 5.

A B et *a b* ſignificant tubos vitreos aequalium diametrorum, quibus plumbo liquefacto immerſis altitudines DC et *d c* ſibimet inuicem ſunt aequales. Idem quoque euenit, ſi alterutri tubus figulinus, dummodo ſit eiusdem diametri, ſubſtituatur; quod commode fiſtulis, vſui herbae nicotianae inſeruientibus peragi poteſt, vtpote quae ſatis accurata in hunc vſum gaudent diametro.

Exp. III. fig. 6.

Diameter tubi AB ſeſe habebat ad diametrum tubi *ab* vti 3 : 1 iſta enim erat $\frac{21}{10}$ lin. haec autem $\frac{7}{10}$ lin. His immerſis in plumbum fuſum altitudo *d c* $\frac{7}{10}$ lin. ad quam iſtud infra libellam ſubſiſtebat, erat propemodum ad altitudinem alterius tubi DC $\frac{27}{10}$ lin. vti 3 : 1, ſeu altitudines erant in ratione reciproca diametrorum. In tubis, quorum diametri erant in ratione quacunque, eundem ſemper oriri euentum ſaepius iterato experimento didici.

In dimetiendis iſtis altitudinibus et diametris menſura vſus ſum anglicana, in qua pes in duodecim pollices, et pollex in decem lineas diuiditur.

Exper. IV.

Sumatur tubus inflexus, quem repraeſentat fig. 7. hunc

hunc immergas in plumbum fuſum, hoc ſubſiſtet in C infra libellam, et erit altitudo perpendicularis DC aequalis altitudini, quae obſeruatur in tubo recto eiusdem diametri.

Exp. 5. fig. 8.

Teſtam fieri curaui figulinam ABCD, cauitas *a b c* priſma repraeſentat, latitudo huius cauitatis in *a c* eſt vnius pollicis et ſemper decreſcens verſus *b*, ibi denique fit $\frac{3}{10}$ lin. Poſita teſta in ſitu horizontali et infuſo plumbo altitudo huius verſus *b* ſemper decreſcebat. Fateor hoc experimentum bis non ex voto ſucceſſiſſe. Nam diſtincte quidem videre erat, metallum fuſum ſeſe attollere ad maiorem minoremue altitudinem, pro maiore aut minore intercapedine; ſed cum teſta ob intenſum huius hiemis frigus non bene eſſet exſiccata, infundendo plumbum inaequales huius oriebantur motus, vt nulla decrementi lex obſeruari poſſet. Interim hoc experimentum, vtut mancum, reticere nolui, quia in metallis, ad quae fundenda maior, quam ferre vitrum poſſit, requiritur gradus caloris, egregie cautelis neceſſariis adhiberi poteſt.

Exp. VI fig. 9.

Sit tubus AB, altitudo plumbi infra libellam ſubſiſtentis diametro tubi reſpondens GH. Immergas illum in plumbum fuſum et altitudo immerſionis ſit aequalis GH, aut illa minor, nihil metalli in tubum intrabit.

Exper. VII. fig. 10.

Si tubum ABC, conſtantem duabus partibus, ampliore et anguſtiore, immittas in plumbum fuſum, et altitudo immerſionis ſuperet altitudinem, quae debetur diametro tubi gra-

gracilioris, hoc pro ratione diametri amplioris ſubſiſtet in tubo, etſi diameter nimis ſit magna, ad libellam perveniet.

Exp. VIII. fig. 11.

Sit ABC tubus, parte ampliore et ſtrictiore inſtructus; EF denotet altitudinem plumbi depreſſi, quae reſpondet tubo graciliori, et GH, altitudinem tubi amplioris. Mergatur vt in experimento antecedenti, ſed ita, vt pars tubi amplioris ſubmerſa aut altitudini EF aequalis, aut illa minor ſit, nihil metalli in tubo ampliore reperies Inuertatur deinceps tubus et denuo mergatur, ſed ita, vt pars ſubmerſa tubi gracilioris non ſuperet GH, deprehendes, plumbum nec in graciliorem intraſſe.

Exp. IX. fig. 1.

Tab. VII. Sit tubus conicus ABC, immittas illum plumbo liquefacto eo ſitu, quem figura exhibet, iſtud infra libellam ſubſiſtet ad altitudinem DC; quo profundius deinceps detruditur, eo maior fit altitudo DC.

Exp. X fig. 2.

Inuertatur eiusmodi tubus et immergatur eius pars exilior, habebis DC pro altitudine plumbi infra libellam ſubſiſtentis; quo profundius illum immergis, eo magis decreſcit altitudo DC.

Exp. XI. fig. 3.

Inflectatur tubus diametri inaequalis in formam ABC, immittatur plumbo fuſo, iſtud ſubſiſtet in C. Sit C diam. ſuperficiei ſupremae plumbi in tubo, erit altitudo perpendicularis DC ea, quae debetur tubo recto diametri C.

Ex-

Exponendum hoc in loco cenſeo, quomodo haec experimenta in tubis capillaribus inſtituerim, quo melius diiudicari poſſit, vtrum momentum aliquod habeant nec ne? et quo facilior aliis, quibus volupe fuerit, ea reiterare ſeu alia tentare pateat via.

Mihi manus operi admouenti duae potiſſimum ſuboriebantur difficultates remouendae. Nam 1) tubi quidam vitrei vim caloris plumbi fuſi ferre non poterant, et 2) altitudo ad quam plumbum infra libellam ſubſiſtebat, non conſpici et eam ob cauſſam menſuratione definiri nequibat. Quod ad priorem attinet, ſaepius iterato experimento animaduerti, rumpi tantum craſſiores, tenuiores autem nihil detrimenti pati. Caleſeci itaque craſſiores paullatim, antequam in plumbum fuſum immergebam, quo facto non conatus meos infringebant. Ad alteram tollendam prima vice hac vſus ſum methodo. Filo aeneo circumuoluto annotaui in tubo altitudinem, ad quam illum in plumbum immerſurus eram, licet et iſtud in parietibus tubi externis adhaerens altitudinem immerſionis oſtenderet. Immerſo tubo orificium eius digito aut cera obturaui, aut hermetice clauſi; tum vero admodum leniter extraxi, ne motus in cauſa eſſet, quo excideret plumbum, et, cum metallum ad altitudinem aliquam ſuſpenſum haereret, menſuraui differentiam inter hanc et altitudinem immerſionis nempe CD. His peractis in plurimis experimentis reperi phaenomena paullo ante memorata. Nullus itaque de ipſorum veritate dubitabam, praeſertim cum et diametros tubulorum ſumma, qua potui, induſtria dimenſus eſſem. Verum enim vero bis obſeruans, plumbum in tubo leniter et verticaliter extracto duobus ſaltibus pollicis longi-

tudinem ſuperantibus ſuperiora petere, minuti ſecundi temporis ſpatio propemodum ibi morari, et deinceps rurſus ad imum deſidere; non potui a me impetrare, vt mihi perſuaderem, hanc methodum omnibus numeris abſolutam eſſe. Ideo hoc ſingulare phaenomenon ad aliam et quidem tutiorem viam quaerendam me impellebat, quam mox indicabo.

Exp. XII. fig. 4.

Immerſo tubo ampliori, ſed tamen reſpectu metalli capillari, e. g. diam. 2. lin. in plumbum fuſum, animadvertebam metallum iſtud infra libellam in tubo ſubſiſtens, conſpici poſſe in forma ſphaerica; ſuperficiem iſtius ſupremam in tubo prius figi, quam in vaſe; et, cum tunc tubo firmiter adhaereat, locum ſuum, illo extracto non mutare.

His fretus facile et exacte altitudinem iſtam DC in tali tubo et huius ope in gracilioribus determinare potui hunc in modum. Vna cum tubo ampliore immerſi duos treſue graciliores vtrinque apertos, ſimulac in ampliore tubo plumbum conſiſtebat, omnes leniter extraxi, quo facto plumbum in omnibus ſuſpenſum haerebat; menſuraui deinceps differentiam inter altitudinem plumbi in tubo ſuſpenſi et altitudinem immerſionis, et deprehendi eadem prorſus phaenomena, quae cognoueram methodo priore. Veritatem itaque dictorum phaenomenorum non amplius in dubium reuocaui, ſed cum nihil egiſſe viderer, niſi et cauſſam illorum qualemcunque allegaſſem, quae de ea pro viribus meditatus ſum in medium proferre et aliorum maturiori iudicio relinquere volui. Prius autem quam me ad iſtam exponendam accingam, propoſitiones quaedam,

qui

quibus innititur, erunt ponendae et veritas ſingulorum experientia comprobanda.

Propoſitio I.

Particulae plumbi liquefacti ſeſe mutuo attrahunt.

Simulac plumbum funditur, in globum ſe colligit, et immerſo in iſtud tubulo capillari ampliori, vt intra illum etiam conſpici poſſit, forma ſphaerica apparet, quae et eo concreto remanet. Cum autem experimenta in vacuo inſtituta oſtendant, figuram ſphaericam aquae et mercurii, attractioni particularum, non preſſioni aeris eſſe tribuendam (a); inde colligere licet, formam ſphaericam plumbi fuſi nulla alia ex cauſa niſi attractione particularum proficiſci. Idem probant duae guttae plumbi ad contactum mutuum in vnum coeuntes.

Propoſitio II.

Particulae plumbi fuſi et ebullientis cohaerent vitro aut argilla.

Si detrudas vitrum candefactum ſeu inſtrumentum quoddam figulinum in plumbum fuſum, et id poſtea extrahas; apparebit particulas metalli perexiguas ipſi adhaerere.

Propoſitio III.

Particulae plumbi liquefacti ſeſe inuicem fortius attrahunt, quam cum vitro aut argilla cohaerent.

Propoſitiones duae priores oſtendunt, particulas plumbi fuſi ſeſe mutuo attrahere et cum vitro aut argilla cohaere-

 rere

(a) Tent. Exper. Academ. del. Cimento Exp. 2. in vac. inſtit. et les Memoires de l'Academie Royal. de Sciences a. 1724. p. 149.

rere. Immerſo tubo capillari in plumbum fuſum, cylindrus plumbi iſtius in vaſe aequalis DC innititur impellere plumbum intra tubum ad libellam vsque, quem etiam adiuuat cohaeſio cum vitro; hoc ſi fieret, particulas intra tubum aſcenſuras a metallo in vaſe contento, quod a lateribus contingunt, recedere oporteret, quod autem, quo minus fiat, impedire conatur attractio mutua particularum plumbi. Cum itaque plumbum in tubo capillari ad altitudinem aliquam DC infra libellam ſubſiſtat, attractio mutua particularum plumbi aequalis eſt ponderi metalli DC et cohaeſioni cum vitro, ergo iſta multo maior. Addi inſuper poteſt ſuperficies ſupremas omnium liquorum in tubis capillaribus ſupra libellam aſcendentium eſſe concauas, plumbi autem et argenti viui, vtpote quae infra libellam ſubſiſtunt, conuexas.

Haec cum ita ſint, meo quidem iudicio cauſſa praecipua plumbi in tubo capillari infra libellam ſubſiſtentis ſita eſt in attractione mutua particularum plumbi.

Experimentis certiores facti ſumus, altitudines plumbi eſſe in ratione reciproca diametrorum. Nunc autem oſtendere conabor, quamobrem hoc ita fieri debeat.

Attractio mutua particularum plumbi et cohaeſio ipſius cum vitro pro vnoquoque tubo capillari eſt determinanda ex tubi peripheria, ſeu, quod idem eſt, ex ipſius diametro. Quo maior enim eſt peripheria, eo plures particulae a reliqua plumbi maſſa recedere neceſſe habent, et eo maior fit cohaeſio plumbi cum vitro.

Sit itaque fig. 3. tubus ADCB eius diameter $= B$, altitudo capillaris $= C$, attractio mutua plumbi pro hoc tubo $= P = B$, et cohaeſio cum vitro $= E = B$; at-

tractio

tractio mutua plumbi pro tubo *adcb*, cuius diameter $= b$, et altitudo capillaris $= c$, ſit $= p = b$ et cohaeſio cum vitro $= e = b$. Iam vero ſcimus ex modo dictis eſſe $P = B^2C + E$, et $p = b^2c + e$, erit igitur $P : B^2C + E = p : b^2c + e$, multiplicando extrema et media $Pb^2c + Pe = pB^2C + pE$ et cum ſit $Pe = pE$, diuidendo et multiplicando per Pe et pE erit $Pb^2c = pB^2C$, diuidendo porro per $P = B$ et $p = b$, reſtat $bc = BC$. Quod ſi denique diuidas per b, et B, eſt $c : B = C : b$.

Experimenta 7. 8. 9. 10. 11. oſtenderunt in tubis, qui non vbiuis aeque ſunt lati, altitudinem DC deberi aeſtimari pro diametro iſtius ſuperficiei, ad quam plumbum in tubo pertingit, quod phaenomenon ſequentem in modum explico. Eſt lex hydroſtatica, fluida quaecunque premere pro altitudine et baſi. Sit itaque ABCDEG, tubus non capillaris communicans, quem fig. 16. exhibet, et in E fundus mobilis F, ita adaptatus, vt fluido circa latera eiusdem nulla pateat via, huius baſis ſit $= b^2$, denſitas fluidi autem $= d$; repleatur tubus fluido vsque ad A erit preſſio in fundum $F = ABb^2d$. In applicatione ad noſtrum caſum nobis tantum concipiamus, fundum mobilem eſſe ſummam ſuperficiem plumbi intra tubum, reliqua ſua ſponte fluent.

DE
TVBIS CAPILLARIBVS PRISMATICIS.

C. E. Gellert.

Philoſophi ideo potiſſimum doctrinam de tubis capillaribus excoluerunt, quo operationes naturae a capillaritate pendentes eo melius perſpicerent, vſi hucusque tantum tubis cylindricis in experimentis ab ipſis inſtitutis. Cum vero a fertili natura non ſolum formentur cauitates capillares cylindricae; ſed potius multiformes a diligentibus naturae ſcrutatoribus in animalibus, vegetabilibus et mineralibus reperiantur; operae pretium iudicaui experimenta in tubis capillaribus priſmaticis capere, phaenomena ibi obuenientia ſollicite annotare, cum iis, quae in tubis cylindricis iam obſeruata ſunt, comparare et eo animum appellere, vt generalior doctrina detubis capillaribus euadat.

Tubi capillares priſmatici artificiales, quantum memini, ad haec vsque tempora fuere incogniti. Arduum inſuper prima fronte videtur, illos conſtruere, cum tamen reuera facili negotio parantur. Praeponam itaque experimentis methodum illos conficiendi, quae haec eſt.

Paretur priſma ferreum triangulare ſeu quadrangulare, longitudinis 6 ſeu 8. dig. et craſſitiei circiter $\frac{1}{2}$ dig. hoc obducatur in officina vitraria vitro candente ductili, perpetuo circumuertendo, vitrum forcipe priſmati bene apprimatur, ita, vt perfecte eius formam acquirat; priſmate extracto, vitrum rurſus bene candefacias, et exinde re-

cta

cta ſemper circumrotando extrahas, habebis tubos capillares extrinſecus quidem cylindricos intus autem priſmaticos, graciliores ſi celeriter tubum extraxeris, latiores ſi tardius.

Tubis hoc modo paratis non dubitabam, quin aqua in iisdem ſit aſcenſura; qua autem ratione id fieret, adhuc ſub iudice, experientia nempe, lis erat. Ad iſtam igitur obtinendam, ſumſi hos tubos priſmaticos recenter conflatos, diuerſae ſed adhuc incognitae capacitatis, longitudine tantum diſtinctos, et ſollicite obſeruaui ad quam altitudinem in vnoquoque aqua pura aſcendebat, vſus menſura anglicana, cuius pes in duodecim digitos, digitus in decem lineas, et linea in decem partes minutas, integer itaque pes in mille et ducentas partes diuiditur. Breuitatis ergo experimenta hac tabula exhibere lubet, in qua altitudines aquae ſupra libellam eleuatae ex vtraque tubi parte annotaui; cum omnes tubi priſmatici ſunt pyramidales, ea ex cauſa, quae omnes cylindricos reddit conicos.

Tubi

Tubi capillares prismatici quadrangulares.			
No.	Longitudo	Adſcenſus aquae.	
		in parte ang.	in parte lat.
	Partes pedis in 1200	diuiſi.	
I.	1210	154	133
II.	1500	80	75
III.	1550	179	166
IV.	1590	80	76
V.	1597	167	142
VI.	1535	160	150
VII.	1690	192	185
VIII.	1620	190	186
Tubi capillares prismatici triangulares.			
No.	Longitudo	Adſcenſus aquae.	
		in parte ang.	in parte lat.
	Partes pedis in 1200.	diuiſi	
I.	1320	110	95
II.	1610	180	168
III.	1745	207	200
IV.	1790	177	171
V.	1810	190	190

Has

Has altitudines ſaepius reiteratis experimentis reperi conſtantes, praeter quod in tubis amplioribus aqua in angulis altius et pyramidis inſtar aſcendebat; cuius menſura vero nequaquam capi potuit, apice ita extenuato, vt tandem omnem aciem oculorum effugeret.

Nactus altitudines, ad quas aqua eleuabatur, ſollicitus fui de menſura baſium inſtituenda; quam cum minus accurate abſolute determinare poſſem, ſequens menſurandi genus relatiuum adhibui.

Tubum A B, fig. 6. ampliorem priſmaticum alligaui perpendiculariter machinae ligneae F G H I, ita vt firmus ac immobilis ſtaret, eius orificium inferius clauſi cera, in ſuperius inſerui infundibulum vitreum in tubum valde gracilem deſinens; deinde impleui alium graciliorem *ab*, fig. 7. ſugendo mercurio, ab omnibus ſordibus apprime purgato, ad certam altitudinem *a c*, filo aeneo annotatam; eandem mercurii maſſam ex hoc tubo immiſi in tubum maiorem A B per infundibulum K, et menſuraui altitudinem A C. Iam vero haec priſmata *a c*, et A C ſunt aequalia, et aequalia priſmata reciprocant baſes et altitudines, legitime itaque inferebam: vti altitudo *a c* ad altitudinem A C, ita baſis A^2 ad baſin a^2. Notandum eſt mercurium lente in infundibulum eſſe infundendum, impetu enim ſi irruit, globuli quidam reſiliunt. Contingit quoque, vt interdum mercurius tubum ingredi ab aere in tubo contento prohibeatur, et in infundibulo retineatur; tunc caute cera ab orificio inferiori eſt paullulum remouenda, vt liber aeri pateat exitus, ſimulac vero omnis mercurius in tubum deſcendit, hic dextre et celeriter cerae eſt apprimendus, ne qua pars mercurii euadat. Tab. VII. fig. 6.

In iisdem tubis, quorum altitudines capillares paullo ante annotaui, altitudines aequalium maſſarum mercurii in binis tubis erant ſequentes.

	No.	altitudo		No.	altitudo	altit. ex part. alt.
Mercurius, qui erat in tubo prismatico quadrangulari.	I.	1050	erat in tubo prismatico quadrangulari.	II.	319	332
	III.	1050		II.	142	150
	IV.	165		II.	164	173
	V.	1050		II.	218	227
	VI.	1050		II.	220	230
	VII.	896		II.	130	138
	VII.	1050		II.	160	170
	VII.	1250		II.	193	205
	VIII.	1050		II.	165	174
	No.	altitudo		No.	altitudo	altit. ex alt. part.
Mercurius qui erat in tubo prismatico triangulari.	I.	216	erat in tubo priſmatico quadrangulari-	II.	160	170
	II.	1300		II.	255	267
	II.	1090		II.	202	215
	III.	1090		II.	176	186
	III.	1300		II.	205	215
	IV.	1300		II.	270	280
	IV.	1090		II.	229	239
	V.	1050		II.	181	192

Baſes

Baſes igitur horum tuborum erant inuerſe vti altitudines in iſta tabula deſignatae, e. g. Baſis tubi quadrang. priſm. No. II. ex parte arctiore ſeſe habet ad baſin tubi priſm. quadr. No. I. vti 1050 ad 332, ex parte ampliore autem vti 1050 ad 319.

Ex tabula prima et ſecunda videre eſt, aquam in tubis priſmaticis gracilioribus aeque ac in cylindricis altius aſcendere quam in amplioribus, et capacitatem exinde in tubis vbiuis aeque latis eſſe cauſſam diuerſarum altitudinum aquae ſupra libellam eleuatae. Hanc ob rem in rationem quandam inter baſes tuborum meorum priſmaticorum et altitudines aquae eleuatae inquiſiui; aggreſſisque quibusdam viis, in rectam reductus certior factus ſum, iſtas altitudines capillares eſſe propemodum interſe inuerſe vti radices baſium: quod, vt eo melius pateſiat, quosdam tubos ad calculum reuocabo. Radix baſeos tubi priſmatici quadrangularis No. I. ſeſe habet ad radicem baſeos tubi priſmatici quadrangularis No. II. quam proxime vti 36 : 65. Adſcenſus aquae in tubo No. II. ex parte arctiore fuit $\frac{80}{10}$ lin. quaeſito quarto proportionali ad hos tres numeros prodit altitudo capillaris pro No. I. $\frac{144}{10}$ lin. aequidifferens a $\frac{164}{10}$ et $\frac{133}{10}$ lin. altitudinibus experimento in tabula prima obſeruatis, quod mirum non eſt, cum hic tubus admodum conicus altus $\frac{1219}{10}$ lin. mercurio repletus fuit ad $\frac{1050}{10}$ lin. Radix baſeos tubi prismatici quadr. No. III. ſeſe habet ad radicem baſeos tubi No. II. ex parte ampliore ferme vti 28 : 65. Aqua in tubo No. II. ex parte ampliore eſt eleuata ad $\frac{75}{10}$ lin. finita operatione quartus proportionalis eſt $\frac{174}{10}$ lin. pro altitudine adſcenſus aquae in No. III. quam experimentum mihi exhibuit $\frac{170}{10}$ et $\frac{166}{10}$ lin.

Radix baſeos tubi priſmatici quadr. No. VIII. eſt ad radicem baſeos tubi priſm. quadr. No II. ex parte ampliori vti 26 : 65. Altitudo aquae ſupra libellam eleuatae in tu'oo No. II. ex parte ampliore $\frac{75}{10}$ lin. Quartus proportionalis $187\frac{1}{2}$ lin. dat altitudinem capillarem pro No. VIII, ab iſta in tabula $\frac{190}{10}$ et $\frac{186}{10}$ lin. non admodum differentem. Radix baſeos tubi priſmatici triangularis N. V. eſt ad radicem baſeos tubi priſm. quadrangularis No. II. quam proxime vti 13 : 33. Aqua in tubo No. II. eleuata ad $\frac{80}{10}$ lin. vna cum iſtis radicibus dat $\frac{203}{10}$ lin. pro altitudine capillari in tubo triangulari No. V. quae experimento obſeruata fuit $\frac{207}{10}$ et $\frac{200}{10}$ lin. Radix baſeos tubi priſm. triangularis No. VI. ſeſe habet ad radicem baſeos tubi priſm. quadrangularis No. II. vti 17 : 36. Altitudo capillaris in No. II. quadr. eſt $\frac{80}{10}$ lin. et quartus proportionalis ad hos tres numeros $\frac{169}{10}$ lin. deſignat. altitudinem capillarem tubi priſmatici triangularis No. VI. quae in tabula inuenitur $\frac{177}{10}$ et $\frac{171}{10}$ lin. Inficias quidem ire non poſſum, in his tubis et in reliquis, ſi calculus inſpiciatur, hunc non ad amuſſim congruere cum experientia; ſed ſpero fore, vt haec differentia, cum ſit exigua, non euertat legem antea traditam: altitudines capillares tuborum capillarium priſmaticorum eſſe in ratione inuerſa ſubduplicata baſium.

Porro, quia circuli ſunt inter ſe vt quadrata diametrorum, erunt quoque altitudines capillares in tubulis priſmaticis inter ſe inuerſe vt diametri circulorum baſibus inſcriptorum. Itidem, cum figurae regulares ſimiles circulis inſcriptae ſunt inter ſe vt quadrata diametrorum circulorum circumſcriptorum; altitudines capillares etiam ſunt inter ſe inuerſe vt diametri circulorum baſibus circumſcriptorum.

Peri-

Peripheriae circulorum ſunt inter ſe vt diametri, erunt itaque adſcenſus aquae in hos tubos ſeu altitudines capillares in ratione inuerſa peripheriarum circulorum baſibus tam inſcriptorum quam circumſcriptorum. Altitudines capillares ſunt quoque in ratione inuerſa quantitatum aquae eleuatae. Nam ſit altitudo aquae eleuatae ſupra libellam in tubo priſmatico ampliori $= A$, eius baſis $= Q^2$, denotet in arctiori adſcenſum aquae a, et baſin q^2. Erit $A : a = q : Q$, vti iam oſtendi: multiplicando extrema et media inter ſe erit $AQ = aq$ et cum AQ^2 et aq^2, dant quantitates aquae; diuidendo per aequalia AQ et aq, reſtant Q et q, radices nempe baſium. Sunt itaque quantitates aquae eleuatae vt radices baſium. Sed radices baſium ſunt inter ſe inuerſe vti altitudines capillares, ideo quantitates aquae erunt etiam inuerſe vti altitudines capillares, nempe erit $AQ^2 : Q = aq^2 : q$ et cum ſit $Q : q = a : A$, erit $AQ^2 : a = aq^2 : A$.

Quantum itaque altitudine aqua, quae in tubis gracilioribus adſcendit, ſuperat iſtam, in tubis amplioribus eleuatam, tantum haec illam quantitate.

Nunc diſpiciendum eſt, quomodo adſcenſus aquae in tubis capillaribus prismaticis ſe habeant ad illos, qui obueniunt in tubis capillaribus cylindricis; et an non generalis regula pro omnibus tubis capillaribus cuiuscunque figurae condi poſſit?

Regula pro tubus cylindricis ſtabilita ita ſonat: altitudines, ad quas aqua in tubos capillares ſupra libellam rapitur, ſunt in ratione inuerſa diametrorum.

Sit ACQ fig. 8. tubus capillaris prismaticus amplior triangularis aut quadrangularis; *acq* fig. 9. eiusmodi tubus

 arctior

arctior. Deſignet C, altitudinem adſcenſus aquae, Q radicem baſeos in ampliori, et c, altitudinem aquae eleuatae, q, vero radicem baſeos in arctiori, erit $C : c = q : Q$.

TBDE fig. 10, denotet tubum capillarem cylindricum ampliorem, $fbde$, fig. 11, arctiorem. E et e ſint altitudines, ad quas aqua aſcendit, D et d diametri B et b, baſes circulorum, erit $E : e = d : D$ ſed baſes circulorum ſunt inter ſe vt quadrata diametrorum, ideo $B : b = D^2 : d^2$; extrahendo radices eſt $\sqrt{B} : \sqrt{b} = D : d$, poſſum itaque pro diametris radices ſubſtituere et dicere vti $\sqrt{b} : \sqrt{B}$ $E : e$. Igitur omnes altitudines tam in tubis capillaribus prismaticis quam cylindricis ſunt in ratione inuerſa ſubduplicata baſium.

Inſtitui inſuper et alia experimenta cum his tubis prismaticis, ſed cum phaenomena prorſus conueniebant, cum iis, quae in tubis cylindricis fuere obſeruata; ſupervacuum habeo iſta experimenta ſigillatim enumerare, ſufficiat potius praecipuas propoſitiones ex iis erutas hic apponere.

In tubis prismaticis ex aqua ſublatis et in aere perpendiculariter poſitis aqua ſuſpenſa haeret.

In tubis prismaticis ad horizontem inclinatis aqua aſcendit pro altitudine perpendiculari.

In vacuo aqua aſcendit in tubos hos prismaticos aeque ac in libero aere. In tubis, diuerſam amplitudinem in ſua longitudine continentibus, baſeos tubi ſupremae, ad quam aqua pertingit, ratio eſt habenda. In tubis vario modo inflexis aqua eleuatur pro altitudine perpendiculari. Mercurius in tubis prismaticis infra libellam conſiſtit et quidem quam proxime in ratione inuerſa ſubduplicata baſium.

Perti-

Pertinent quoque ad doctrinam capillarem phaenomena ſpeculis vitreis parallelis obſeruata. Videndum igitur eſt, an ſtabilita noſtra regula generalis et apud iſta locum obtineat.

Viri clariſſimi Hauksbeius et Muſchenbroekius deprehenderunt, altitudinem aquae aſcendentis intra ſpecula eſſe in ratione inuerſa diſtantiarum a ſe inuicem. Sit diſtantia maior duorum ſpeculorum inter ſe $= d$, altitudo aquae eleuatae $= a$, diſtantia minor $= D$, altitudo aquae eleuatae $= A$, erit $a : A = D : d$, et aqua eleuata repraeſentabit duo parallelepipeda. Sed ſi haec parallelepipeda reſoluantur in priſmata $d^2 a$ et $D^2 A$, quorum baſes ſunt quadrata diſtantiarum, conſtituunt d, D, latera ſeu radices, et erunt itaque altitudines aquae eleuatae in ratione inuerſa ſubduplicata baſium.

OBSER-

OBSERVATIONES ANATOMICAE RARIORES.

AVCTORE
I. C. Wilde.

Obſeruatio I.

De
Vena caua duplici aſcendente.

Anno 1737. extraordinarius et plane inſolitus in corpore cuiusdam cadaueris maſculi venae cauae ſtatus aperto abdomine oculis ſe obtulit. Iniectione in vaſa cruralia tam arterioſa quam venoſa facta, et remotis viſceribus tres ſub peritonaeo, iuxta et ſuper ſpina lumborum ſitae viſae fuerunt eleuationes, quae clarius detectae palam fecerunt, vnam et mediam aortam magnam, binas laterales vero duos venae cauae aſcendentis truncos conſtituere ſequentem in modum: aorta deſcendens, proceſſibus diaphragmatis egreſſura, ramos ſuos inſignes, coeliacum videlicet et meſaraicum ſuperiorem, qui poſterior duplo fere maior coeliaco erat, dabat. Hic meſaraicus ſuperior etiam de ſe ſpargebat cyſticam gemellam arteriam, quae conſueto prouentus modo alias ortum ſuum coeliaco debet. Aortae truncus deſcendens viam paullo plus dexterius ac ſolet, et ſuper ſpina lumborum ipſa ſumebat, in itinere ſuo emulgentes, ſpermaticas, meſaraicam inferio-

inferiorem, et lumbares, quasque conſueto ſuo loco producens arterias: inferius diuaricabatur et vaſa iliaca dimittebat. Vena vero caua aſcendens non longe ab introitu in hepar, vbi vncialis craſſitudinis exiſtebat, ex duobus diſtinctis et aequalibus conflari truncis videbatur. Ita autem trunci ipſi erant locati, vt vnus dexter latus ſpinae dextrum, alter ſiniſter eiusdem ſpinae latus occuparet ſiniſtrum, et aortam vterque contineret mediam. Quo ab ortu iſtorum truncorum ipſo, reſpectu itineris progreſſiui, quo ſanguinem verſus cor vehunt, et vbi vena caua ipſa implantatur, exordiamur, neceſſe erit ibi deſcriptionem inchoare, vbi diuiſiones in vnum coguntur truncum; etenim iliacis tam internis quam externis poſt arterias iliacas congredientibus, truncus ille venae cauae aſcendens ſolitarius conficitur, qui dextrum ſpinae latus poſſidens, penes renem ſuccenturiatum dextrum in hepatis ſubſtantiam immergitur. In noſtro ſubiecto, vti duo trunci venae cauae, ſic etiam iliacorum immerſio in ſui lateris quemque truncum erat ſeparatim conſpicua, eo tantum diſcrimine, vt truncus incipiens ſiniſtri lateris paullo inferior ac ille dextri lateris apparuerit; ſiquidem canalis quidam oblique transuerſalis duas vncias longus et dimidiam vnciae craſſus, ſuper vertebra lumborum quinta et pone ramos iliacos arteriae magnae traiiciens, binos truncos copulabat, ita quidem, vt in dextri trunci latere prope diſtantiam vnius vnciae ab iliacis emergeret, inque ſiniſtri lateris trunco, vbi iliaca vaſa, vt externum atque internum, concurrunt, figeretur, in via vero et paullo ſiniſterius venam emitteret ſacram. Trunci in itinere ſibi pares poſt hunc transuerſe obliquum et communicatiuum

canalem diametrum dimidia vncia maiorem tenebant; latiores et ad tres quartas partes ſuperius, vbi coniunctionem ſubeunt, euadentes. Dexter truncus aſcendens non procul ab emulgente vena vas ſpermaticum dextrum ſuſcipiebat, paullo ſuperius vero venam emulgentem, quo iterum aliud vas ſpermaticum abſcedebat: ſiniſter vero truncus itidem ſub vaſis renalibus aſſumebat vas ſpermaticum ſiniſtrum, poſthac binas venas renales, ſuper renalibus denique in arcum dextrorſum vergentem et arteriam magnam transſcendentem excurrebat, in arcum vena atrabilaria ſiniſtra infigebatur. Lumbares venas quisque truncus ſui lateris fouebat, in vnum tandem, ſuppeditata inſula, combinati trunci ſtipitem ſesquiunciam longum principalem porrigebant, quem hepati committebant et qui hepar antequam ingrediebatur, venam atrabilariam dextram, vel potius breuem canalem, (quia ren ſuccenturiatus proxime ſtipitem adiacebat) admittebat.

Hic adiici meretur: ſiniſtrum hepatis lobum in hoc ſubiecto ſolito multo maiorem, lienem ad vsque protractum, ac cum illo ad quatuor vncias, quoad tunicas vtriusque proprias, concretum exſtitiſſe. Item ductum pancreaticum duplici trunco et inſertione gauiſum fuiſſe, in talem quippe modum efformatum: apud lienem, vbi pancreas incipit, ex ramulis conflabatur ductus; hic duas, et quod excedit, vncias progreſſus in binos alios dirimebatur ductus, quorum vnus et ſuperior in diſtantia duorum ferme digitorum transuerſorum ab altero verſus pylorum, alter et inferior vero cum cholidocho ductu, vti in homine ſolet, coniunctim duodenum inteſtinum pertundebat.

Tab.

Tab. VIII. Fig. 1.

A Arteria magna.
a . . . coeliaca.
b . . . meſaraica ſuperior, ex quo cyſtica gemella emergit.
c c Arteriae renales.
d d . . . ſpermaticae.
e Arteria meſaraica inferior.
f Arteriae magnae diuiſio in iliacos.
g g g g lumbares arteriae.
B Stipes venae cauae principalis hepar ingrediens.
C Truncus v. cauae dexter.
D . . . . ſiniſter arcum ſuper aorta faciens.
E Communicationis canalis v. cauas interſitus
e Vena ſacra.
F F Vaſa iliaca interna.
G G . . . . externa.
h h Venae ſpermaticae dextrae.
i Vena ſpermatica ſiniſtra.
K K K Venae renales.
l Vena atrabilaria ſiniſtra.
L L Renes.
M M . . . ſuccenturiati.
N Crepido, vbi ſtipes hepar intrat.
O Diaphragma reflexum.
P P Proceſſus muſculi diaphragmatis.
Q Q Vreteres.

Tab. VIII. Fig. 2.

Monſtrat communicationis canalem, duabus venis cauis inſertum.

Obſeruatio II.

De

Vena iugulari externa, quoad progreſſum, triplici, quoad inſertionem autem quadruplici.

Viſu conſideratuque elegans venarum iugularium externarum in cadauere quodam, 1738. diſſecto, trigeminis truncis obuiarum conſtitutio ſequens nobis occurrit.

Cute colli myodeque expanſione demta, extraordinarius tracheam ſupercurrens conſpectus fuit atque ſatis largus ramus, qui capiti propior factus ſe ſiniſtrorſum poſt glandulam thyroideam abſcondebat. Hic ramus a ſubclauia vtrinque inter venas iugulares externam et internam medius, duabus quaſi radicibus propullulabat, quae radices craſſitie quidem impares, ſed conuergentes, in media tracheae parte coibant et ramum, magnitudine iugularibus nil cedentem, praebebant. Hic ramus inſignis, dum muſculos ſterno-hyoideum et thyroideum ſiniſterius incedens transcenderet ſuper glandula thyroidea ſiniſtri lateris quaſi immergebatur, et per canalem breuem, quatuor lineas longum, cum vena ingulari interna ſiniſtra copulabatur. Haec iugularis interna principali ſuo ramo e ſinu laterali durae meningis, reliquis vero huc appropeantibus et minoribus ex muſculis capitis et capite ipſo ſanguinem vehebat. Truncus vero extraordinarius et acceſſorius magis ab anteriori colli et interiori linguae parte

parte, nec non a glandula thyroidea ramulos ſuos atque ſurculos accipiebat. Radix huius dextra ramo a glandula thyroidea deſcendente inſtructa erat; ſiniſtra vero, vt anguſtior, ſic nullis omnino ramulis gaudebat. Iugulares externae, in diametro multo minores internis, aduentabant ab exterioribus et muſculoſis tam colli quam faciei partibus; et radices iuxta praedictas exterius in ſubclauiis implantabantur. Hinc inde prodeuntes ſurculos cum ramulis trunci extraordinarii in anaſtomoſeos vinculum congredi vel ex eo pateſcebat, quia inflato vno trunco, alter ſtatim flatum admittebat. Propter hanc ramulorum communicationem, et propter huius venae acceſſoriae inſertionem quoad venas iugulares externas, immo propter ſitum exteriora magis reſpicientem, hanc venam inferius bifurcatam potius iugularibus adnumeramus externis, quam internis, quamquam propter congreſſum cum iugulari ſiniſtra interna et propter priuatum cum externis conſortium et diſtinctam inſertionem aliis ad internas magis referendam illam eſſe aptius videri poſſit. Communitas interim venarum iugularium internarum, externarum, et ſubclauiarum, intermedio deſcripto ramo, caput huius ſubiecti omnino commodius atque facilius ab onere ſanguinis ſubleuare potuit ac debuit, ac nec in alio ſperare licebit.

Tab. VIII. fig. 3.

A, Truncus iugularis externus extraordinarius.

B, Eius communicatio cum iugulari interna.

C C, Eiusdem radices, quarum dextra ramum *c.* a glandulis thyroideis ſuſcipit, ſiniſtra vero multo erectior exiſtit.

D D, Inſertiones apud venas iugulares externas.
E E, V. iugulares externae.
F F, V. ſubclauiae.
G G, V. iugulares internae.
H, ductus thoracici inſertio.
I, V. caua deſcendens.

Obſeruatio III.

De Venae azygos trunco duplici.

Hominis venae ſine pari varia et ſingularia inceſſus atque diſtributionis apud auctores conſignata exempla proſtant. Noſtra quam exhibemus venam azygon duplicem, hunc in modum conſtituta fuit. Truncus ad latus ſpinae dorſi vtrumque ſingularis, magnitudine minimo digito aequalis, notatus fuit; dexter ceu principalis truncus ſuam ac alterius trunci ſarcinam in venam cauam deſcendentem transuehens, ex interſtitio intercoſtali, vt videbatur, vltimo et regione lumbari apud vertebram lumborum primam ortum capeſſebat; quatuor inter aſcendendum intercoſtalibus ramis aſſumtis communicationis canalem ſuper corpore vertebrae dorſi nono oblique appropeperantem recipiebat, et iterum duobus aliis ramis ſibi vindicatis, alium communicationis canalem ſeptimae vertebrae corpus oblique transcendentem fouebat. Vlterius progrediendo, quatuor intercoſtales ramos ſuſcipiebat, quorum primus tribus aliis, ex interſtitiis intercoſtalibus ſupremis accurrentibus ramis, conflatus erat; truncus tandem, ſuper bronchia dextra reclinatus, in venam deſcendentem ipſam conſueto loco immergebatur.

Alter

Alter et ſiniſter truncus tribus apud primam vertebram lumbarem ramis incipiebat, quos inter vnus diaphragmaticum inferiorem, alter iuxta proceſſum diaphragmatis a tunica peritonaei adipoſa accedens adipoſum, tertius vero a muſculo quadrato et interſtitio, quod inter vltimas coſtas eſt, adueniens, lumbarem et intercoſtalem vltimum conſtituebant: aſſurgentem duo rami intercoſtales intrabant, poſt canalis vetebram nonam ſuperſcandens ſequebatur: tribus deinde intercoſtalibus ramis in truncum hunc ſiniſtrum inſertis, canalis communicationis alter ſeptimam dorſi vertebram ſuperans aſſociabatur: poſtremo adhuc tribus intercoſtalibus in truncum immiſſis ſuperius ramus accedebat in arteria aſpera et oeſophago ortum ducens; tandem ramus ſupremus inſignis, duobus ramulis ab interſtitiis intercoſtalibus ſuperioribus aduentantibus compoſitus intercoſtalem ſuperiorem ſiniſtri lateris dabat.

Quoad ſitum horum truncorum notandum venit, ſiniſtrum huius azygae truncum profundiorem aliquatenus poſitum viſum fuiſſe prae illo dextri lateris. Vena praeterea caua tam deſcendens quam aſcendens amplitudine quaeque conſueta et haud diminuta deprehenſa fuit.

Tab. VIII. fig. 4.

A A, Vertebrae ſpinae dorſi.
B B B, - - - - tres lumbor.
C, Truncus V. azygos dextrae.
c c c c etc. Venae intercoſtales.
d, princip. huius trunci.
c, ramus intercoſtalis ſuper.

F.

F, truncus V. azygos ſiniſter.
c c c c etc. Venae intercoſtales.
g, ramulus diaphragmaticus inferior.
h, - - - - adipoſus.
i, - - - - lumbaris.
k, - - - - arteriae aſperae et oeſoph.

Obſeruatio IV.

De

Muſculo ſingulari gemino ſternum ſuperiacente.

Anno 1739. in cadauere virili muſculorum par ſingulare, ſuper ſterno ſitum, contemplati ſumus. Illud, vti conſpectum fuit, litteris atque icone ſiſtimus. Ad latera oſſis ſterni tractus fibrarum carnoſarum longitudinalium obueniebat, quae an ad platysmamyoides referendae ſint, vel alium repraeſentent muſculum ex examine indagatiori inclaruit: nempe remotis remouendis patuit iuxta cartilaginem xiphoidem vtrinque muſculum locari ſesqui digitum latum: porro innotuit, hunc ipſum muſculum geminum, ſuperato dimidio ſterno, in tendinoſam ſiue aponeuroticam abire conſtitutionem ad vsque clauiculas continuantem; deinde aperte dignoſci potuit, hanc aponeuroſin ſiue tendinem clauiculas transgredientem cum ſterno-maſtoideo muſculo anterius intime connecti: ſeparatim hic muſculus geminus, quousque carnoſus erat, incedebat; in tendinem vero ſtructura tribus oblique transverſis productionibus tendinoſis atque anſulis mutuo coniungebatur; congreſſum cum maſtoideo per lineam conſpicuum antopſia ipſa probabat. Muſculus hic quaſi bicorporeus et capiti et pectori inſeruiiſſe videtur.

Tab. VIII.

Tab. VIII. fig. 5.

A A Muſculi gemini, carnoſo principio.
B B - - - - - tendinoſus progreſſus.
C C C - . - - anſulae tendineae.
D D - - - - - carnoſi fines cum
d d Maſtoideis muſculis iuncti.
E E Clauiculae transparentes.
F F Muſculi pectorales magni.
G Muſculus deltoides.

Obſeruatio V.

De

Tendinum, digitos manus ſiniſtrae extendentium, extraordinario numero.

Quemadmodum naturam aliquando in muſculorum fabrica variare animaduertere licet; ſic haud minus tendines quorundam muſculorum craſſitudine vel numero adaugeri conſpicuum obuenit. A tali augmentatione vel pluralitate roboris maioris vim et diuerſimodam partis inſtitutionis atque quandoque actionem ſingularem in homine vno atque altero dependere, nemo facile, qui muſculos cum tendinibus tanquam motuum inſtrumenta principalia eſſe cognoſcit, ibit inficias.

In ſubiecto quodam, quod nobis 1740. ad diſſecandum oblatum fuit, vidimus manum ſiniſtram, quoad tendines digitos extendentes, multo a dextra, quae, vt ſolet, conſtituta erat, differentem, quippe dorſum eius tendinibus quaſi obrutum erat. Quo tales tendines, numero duplicatas ſpecialius indicemus, muſculos phalangarum

extenſores, tam communem quam proprios conſiderabimus.

Muſculus huius manus, vel potius digitorum extenſor communis, quoad oriundi principia in condylo humeri externo ac parte poſteriori vlnae atque radii, vt ſolet, naſcebatur, carnoſus vltra dimidiam ſui partem procedebat, in 4. poſthac productiones tendinoſas, ligamentum annulare traiicientes, excurrebat, quarum prima ſuper indicis, ſecunda ſupermedii digiti phalangis in latere interiori protendebatur, tertia in duos abſcedebat tendines, qui, ligamento tranſuerſo ſuperato, iterum dirimebantur, binisque ſingulis tendinibus digitis annulari atque auriculari donatis finiebant, illo excurſus diſcrimine, vt tendo duplicatus vnus ſeparatim annularis digiti phalangas transcenderet, alter digiti minimi vero poſt ligamentum annulare quidem geminatus, apud extremitatem oſſis metatarſi, quod digitum iſtum ſuſtinet, iterum coiret, et ſic adunatus phalangas praedicti digiti, ad latus interius tranſcurreret; quarta denique duos ablegabat tendines, quorum vnus et interior poſt ligamentum tranſuerſale diuaricatus os metatarſi et digitum minimum tranſcendebat; alter exterius latus tam metacarpi, quam digiti occupans, iuxta phalangas ipſas deſinebat, et ſic dictum auricularem proprium praebebat. Nouem itaque tendines hic muſculus, qui alias tantum 4 aut 5 (quia auricularis proprius cum eo cohaeret) dimittit, emittebat. Reliqui qui adiacebant muſculi extenſores proprii, vt indicator et bicornis in media vlnae ac radii parte nati carnoſa prodibant coniunctione, ita vero, vt indicator mox ſeparatus ante ligamentum binos produceret tendines, vnum ſuper indicem, alterum

alterum ſuper digitum medium, exterius latus reſpicientes, exporrectos; extenſor autem pollicis non longe a ligamento in quinque diuideretur tendines ex quibus vnus in phalange pollicis vltima et latere exteriori, alter eiusdem in ſecunda, tres caeteri vero in oſſe metatarſi, quod pollici ſuſtentaculo eſt, terminabantur. Loco trium vel 4 (ſi extenſor pollicis tricornis eſt) tendinum igitur, 7 hic notabantur tendines, et ſic in his propriis aeque ac communibus muſculis, numero quam quem natura alias largiri ſolet, alterum tantum plures.

Tab. IX. Fig. 1.

A Muſculus extenſor digitorum manus communis, in 4 productiones tendinoſas excurrens, quorum

1. dat tendinem indici.
2. porrigit medio.
3. ante ligamentum transuerſale duplicatur, et poſt ligamentum iterum ſingulus tendo geminatur, et ad annularem duos, totidemque tendines ad auricularem ablegat.
4. duos tendines ad minimum digitum dimittit, interior poſt ligamentum denuo partitur, exterior auricularem proprium repraeſentat.

B muſculus indicator proprius 2 tendinibus conſpicuus, quorum vnus indici, alter medio digito impertitur.

C muſculus pollicis proprius, bicornis vel tricornis dictus tendinibus 5 phalangibus et oſſi metatarſi pollicis inſertis, obuius.

Obſeruatio VI.

De Inteſtino coeco et proceſſu vermiculari.

Nonnunquam obtigit, praeter glandulas meſenterio humano ſolitas, prope angulum, quem ileum et colon coniuncta faciunt, vnam glandulam nucem moſchatam aequantem, vel duas ac plures ſimul congregatas, ſed minoris differentisque magnitudinis vidiſſe.

In quodam eiusmodi ſubiecto, cuius coecum inteſtinum eiusdem cum colo amplitudinis et digitum transuerſum tantum longum erat, ac cuius fundus in proceſſum vermicularem finiebat, inter ileum et colon, glomum, plus quam triginta glandularum, auellanas, pinearum nuces et piſorum magnitudinem aequantium conſpexi: Vaſa itidem a colo, coeco, et appendicula vermiculari accurrentia lymphatica, non ſolum quia tumebant lympha, oculis luſtrare, ſed etiam quaedam ſingularis amplitudinis cernere dabatur. Haec vaſa tam ſuperficiem coli, coeci, et appendiculae perreptabant, quam glandularum cohorti ex parte appropinquabant, ex parte vero per meſocolon, meſaraeum ipſum intrabant. Hoc interim hic adferre praeterire non poſſumus, flatum ramis venoſis, colo coecoque vicinis, immiſſum vtrumque penetraſſe inteſtinum vtrumque eleuaſſe. Quod phaenomenon et alio tempore et in aliis inteſtinorum tam tenuium quam craſſiorum portionibus expertus ſum.

Aliud, quod hac occaſione haud intactum relinquere volumus, nobis alio tempore obuenit inteſtinum coecum, eiusdem tantum cum colo diametri, proceſſumque vermicularem bis circumtortum habens. Hoc coecum, tanquam

quam appendix coli, quia vix latum digitum ab inſertione ilei protendebatur, proceſſum vermicularem ſpiraliter tortum atque retortum et 5—6 vncias longum in fine ſuo gerebat aſſidentem, qui proceſſus in principio ceu infundibulum excauatum dilatabatur, et digiti pollicis capax erat, poſt vero in vermicularem formam anguſtabatur; vbi coecum intrabat, valuula ſpirali inſtructus erat, quae ovale digiti apicem comprehendens foramen ſuppeditabat, apud foramen inteſtinum coecum, vt dictum, breue incipiebat, et receſſu quodam ſiue ſinu et valuula conniuente ab ileo, quod iuxta patebat, et a colo, quod ante valuulam Bauhini aſcendebat, diſcriminabatur. Hic proceſſus, quemadmodum ſingulariter conſtructus et locatus imo magno orificio patulus erat, ſic facile illum recrementa ingredi immo ibi ſtabulari poterant; hinc non multum mirati ſumus, quod illum proceſſum ſcybalis induratis tumidum et conſtipatum reperiremus. Praeterea inter ileum et colon tres adhuc glandulas, nucem auellanam magnas, ſimul offendimus.

Tab. IX. Fig. 2.

Monſtrat portionem coli atque ilei cum coeco, admodum breui, atque appendicula vermiformi, in fine coeci pendente.

A A A Vaſa ſanguifera, atque iuxta decurrentia vaſa lymphatica.

B B Glandularum in angulo ilei atque coli reſidentium cohors.

C C Vaſa lymphatica, meſaraeum verſus tendentia.

D Ligamentum coli.

Tab. IX. Fig. 3.

Oſtendit aliud coecum admodum breue cum ſua appendicula ſpirali.

A Portio inteſtini coli.
B Inteſtinum coecum.
C Initium appendiculae magnopere dilatatum.
D Reliqua eius portio anguſtata atque ſpiralis.
E Portio inteſtini ilei.
I Vaſa ſanguifera.
G Tres glandulae colo et ileo adſitae.

Tab. IX. Fig. 4.

Exhibet eiusdem interiorem faciem, in qua praeter valvulas conniuentes obuiam eunt

A Orificium ilei ſ. dicta valuula Bauhini, hic admodum hians.
B Orificium appendiculae, cum valuula ſpirali.

DE RENIBVS SVCCENTVRIATIS IN PVERO DISQVISITIS NOTATA.

AVCTORE

I. C. Wilde.

Puerum 3 - 4 annos natum 1739. menſe martio quoad renes ſuccenturiatos perſcrutatus ſum, ſequentiaque animaduerti.

Tunica adipoſa renes circumueſtiens ex parte etiam renes ſuccenturiatos cingebat, ita, vt prae illa glandulae iſtae renales vix internoſci vel diſtingui poſſent. Sed tunica ipſa paullulum ablata, vaſa ſuccenturiatorum facta ſunt perſpicua, quae inſequendo corpora manifeſtarunt ipſa. Erant autem illa vaſa partim arterioſa partim venoſa. Arteriarum, quas notabimus quaternas, binae propriae, alterae binae communes non oppoſite aequalem ſumebant originem; propriarum ſcilicet dextra ab emulgente dextra ipſa, quae alias etiam a trunco aortae poſt meſaraicam ſuperiorem propullulat. Siniſtra vero, quae aliquando quoque ex coeliaca prouenit, penes radicem meſaraici rami ſuperioris ex trunco ipſo aortae naſcebatur, vtroque vero, (quam quoque in adultis ſubiectis vel vnius vel vtriusque lateris gemino principio atque trunco, anterius vno, altero poſterius capſulae latus ſuis ramis percurrente vidimus) in corporibus ſuccenturiatorum ipſis diſtribuebatur. Communium vero vel potius arteriarum phrenicarum

rum poſteriorum, quae conſueto modo ex coeliaca incipiente ipſa prodeunt, altera ſummitatem dextri renis ſuccenturiati praetergrediens, ex angulo, quem truncus arteriae et ramus coeliacae efficiunt; altera vero ſuper ſiniſtro progrediens paullo inferius et infra coeliacum, meſaraicum ramum ſuperiorem verſus, proueniebat, vtraque diaphragma verſus aſſurgens arcum dabat, qui dum capſulam renalem praeteriret, varios ramulos ceu radios in ſuperficie capſulae in ſurculos ſeſe diſpergentes dimittebat, ſuperius vero ramis inſignibus diaphragma petebat. Flatu arteriis propriis commiſſo et capſulae adipoſa tunica ſingulatim eleuabantur, quod aeque quidem, ſi arteriae phrenicae ſiue communes inſufflarentur, ſed non tam eminenter fiebat; inciſa porro tunica adipoſa, aer contentus euanuit remanentibus capſulis ipſis tumidis. Noſtrum, quod circa haec phaenomena eſt iudicium, putamus, quia ramuli tam ab atrabilariis quam phrenicis tunicam adipoſam perreptant, apprehenſu facile eſſe, etiam praefatam adipoſam flatu diſtendi, dum autem ramuli admodum exigui et pauci a phrenicis illam tunicam adrepunt, capſulaeque atrabilariae etiam ſuperficie tenus quaſi tantum illis percurruntur, nec tunicam pinguedinoſam, nec capſulas a flatu phrenicis immiſſo eodem modo attolli, tunicam adipoſam inflatam vero, vulnuſculo facto, ſubſidere relictis capſulis elatis poſſe, quia rami phrenici et his et illi ramulos largiuntur ſingulos diuerſos. Vaſa caeteroquin venoſa a conſuetis locis, vt dextri lateris vena atrabilaria a v. caua ipſa, ſiniſtri lateris ab emulgente procedebant, vtraque vena inſufflata capſulae nimium eleuabantur. Capſulae ipſae in noſtro ſubiecto ceu maſſa veſiculoſa adipe

obſcure

obſcure albido conſtans et pinguedine circumuoluta conſiſtentia admodum ſimiles comparebant, vnde primo intuitu adipem mentiebantur et nobis ipſis imponebant: inſufflatae maiorem iuglandem aequabant et aliquo modo pellucidae conſpiciebantur; ſed vtraque cauitate intus aequali erat praedita et gelatinoſo pallide rubro tincta et obducta humore.

Tab. IX. Fig. 5.

Oſtendit partes quasdam hypochondrii a poſteriori facie conſpicuas ex adulto homine.

A A Renes.

B B - - - ſuccenturiati.

c Arteria aorta.

D Vena caua.

E E Arteriae atrabilariae.

e e Venae atrabilariae.

F F Arteriae phrenicae cum radiatis ramis in capſulas demerſis.

G Hepar.

H Lien.

I I Diaphragma reflexum eiusque i i. proceſſus.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE.

OBSERVATIO
ECLIPSIS SOLARIS
d. $\frac{24 \text{ Iulii}}{4 \text{ Auguſt.}}$ 1739.

In Obſeruatorio Imperiali Petropolitano habita

a G. Heinſio.

Ordo Obſer.	Tempus verum	Differentia aſcenſ. rectar. centr. ☉ et ☽.	Differentia declination. centr. ☽ et ☉.	Quantitas phaſium	Quantitas phaſium in digitis.	minut.
1. -	5h. 10'. 49''.	Initium eclipſeos per tubum 15. ped. exacte obſeruatum. In partibus ſcalae, qualium ſemidiameter Solis continet 267				
2. -	17. 27.	439½.	164½.	49.	1.	6
3. -	22. 24.	400½.	154.	89.	2.	0
4. -	30. 45.	340.	138.	147½.	3.	19
5. -	37. 3.	295½.	123½.	197.	4.	26
6. -	41. 59.	256.	114.	237.	5.	20
7. -	47. 11.	Macula erat in diſco Solis magnitudine reliquas ibi exiſtentes antecellens, quam littera M deſignaui in fig. 1. Appulſum limbi Lunaris ad eam obſeruaui, et conta-				

Tab. X.

ctum mutuum ad tempus iam notatum animaduerti. Declinauit autem iſtius maculae centrum circa tempus eclipſeos a centro Solis verſus auſtrum 92. part ſcalae ſeu 5′. 29″ circuli maximi; quoad aſcenſionem vero rectam maculae centrum occidentalius fuit centro Solis 53. part. ſcalae ſeu 13¼ ſecund. in tempore

8. - 47. 5 In Peripheria Lunae per medium dictae maculae tranſiit. Praecedens et haec obſeruatio facta eſt per tubum 15. ped.

9. - 58. 1. 136. 81½. 359 8. 4

10. 6. 4. 26. 88. 169⅓. 405½. 9. 7

Ab obſeruatione prima ad hanc vsque centrum Lunae occidentalius fuit centro Solis quoad aſcenſionem rectam. In ſequentibus centrum Lunae orientalius intelligi debet centro Solis.

11. - 18. 10. 22. 42⅓. 468. 10. 3

12. - 28. 50. 109½. 19. 405. 9. 6

13. - 38. 15. Medium ſupra memoratae maculae emerſit.

14. - 39. 0 Integra macula emerſit, vtraque obſeruatio facta eſt per tubum 15. ped.

Ab

Ab obſeruat. 1. vsque ad 12. centrum Lunae a centro Solis declinavit ſeptentrionem verſus. In ſequentibus declinatio centri Lunae a centro Solis verſus auſtrum accipi debet.

15.	-	54.	57.	$312\frac{1}{2}$.	$35\frac{1}{2}$.	202.	4.	32
16.	7.	1.	7.	$363\frac{1}{2}$.	$47\frac{1}{2}$.	150.	3.	22
17	-	7.	21.	$415\frac{1}{2}$.	58.	$98\frac{1}{2}$.	2.	13
18	-	18.	53	Finis eclipſeos exacte obſeruatus per tubum 15. ped.				

Figura prima Phaſes enumeratas declarat et numeri in ſemita centri Lunae adſcripti notant loca, in quibus centrum Lunae fuit iis temporis momentis, quae iisdem numeris in praecedenti recenſione inſigniuntur. Coelum toto eclipſeos tempore ſerenum obſeruationi optime favit. Cum autem Sol deficiens ad horizontem occiduum vergeret, ne refractionis diuerſitas ad horizontem obſeruationibus vim inferret, pro obſeruandis eclipſeos phaſibus methodum ſequentem extra periculum refractionis poſitam adhibui. Vſus nempe ſum quadrante portatili tubo inſtructo, in cuius foco duo fila V T, H R, ad angulos rectos ſibi inſiſtentia extabant. Tubum in Solem direxi ſic, vt poſito quadrantis plano in ſitu proxime verticali, filum H R ſitum prope horizontalem, filum V T verticalem, nanciſcerentur. His factis notaui moram tranſitus diſci ſolaris vel per filum horizontale H R vel per verticale V T, prout ſcilicet totius diſci tranſitus, habito partis Solis deficientis reſpectu, obſeruari potuit. Praeterea animaduerti momenta appulſus cornuum phaſeos, limbi Lunaris et limbi Solis ab eclipſi immunis ad idem filum ſiue horizontale ſiue verti- Tab. XI. Fig. 2.

verticale. Quibus datis conſtructio phaſeos abſolui et poſitio centri Lunae reſpectu centri Solis et circulorum coeleſtium, nec non quantitas diametri Lunae definiri poſſunt.

Repraeſentent H R, V T fila ad angulos rectos ſibi inſiſtentia, A D B exhibeat diſcum Solis vtrumque filum tangentem in A et B. Referat R C I poſitionem diurni centri Solis reſpectu filorum V T, H R; radius vero CD (C B vel A C) expreſſus intelligatur per partes temporis, quo dimidium diſci Solis per meridianum vel horarium quemuis tranſit. Et exponet C R ſemimoram tranſitus diſci Solaris per filum HR. EC vero ſemimoram tranſitus Solis per filum VT. Conceſſis igitur mora tranſitus Solis per horarium et mora tranſitus eius per alterutrum filum H R vel V T, dabitur poſitio diurni R C I reſpectu filorum.

Fig. 2. Notati iam ſint appulſus cornuum B, A, periphaeriae Lunae M et limbi Solis ſequentis F, ad filum V T. Deſcriptus ſit diſcus Solis A B F vtrumque filum tangens et quidem limbo ſequenti F filum V T; expreſſa autem ſit diameter diſci per moram tranſitus eius per horarium. Sit R C poſitio diurni centri Solis reſpectu filorum ſecantis filum V T in E. Capta ſit E *b* aequalis interuallo temporis inter appulſus cornu B et limbi Solis F ad V T. Eodem modo ſit E *a* aequalis interuallo temporis inter appulſus cornu A et limbi ſolis F ad V T; nec non E *m* aequalis interuallo temporis inter appulſus peripheriae Lunae M et limbi Solis F ad V T. Per puncta *b*, *a*, *m* ſic definita actae intelligantur ad VT parallelae *b* B, *a* A, *m* μ; quarum *b* B ſecet peripheriam Solis in B, *a* A in A; et dabuntur loca cornuum B, A in peripheria diſci Solis, rectam vero *m* μ tanget limbus Lunae. Datis iam

pun-

punctis A, B, et recta $m\mu$ poſitione, dantur centrum G et radius circuli per puncta A, B tranſeuntis et rectam $m\mu$ tangentis, hoc eſt, dantur centrum Lunae poſitione et ſemidiameter eius magnitudine. Huius rei vlteriorem et analyticam expoſitionem dedi in recenſione obſeruationis eclipſis Lunaris d. 8. Septembr. 1737. ſt. n. Simili modo proceditur, ſi aliae dentur obſeruationum conditiones.

Haec phaſeos conſtructio, quae ſatis expedita videtur, ſupponit diſcum Lunae intra diſcum Solis immotum interea, dum appulſus cornuum et limbi Lunae ad fila tubi obſeruati ſunt. Hoc autem ſupponere non licet, niſi eximiis ſubinde erroribus locum concedere velimus. Diſcus Lunae intra diſcum Solis ſitum continuo mutat, adeoque momenta appulſus cornuum obſeruata multum ſaepiſſime diſcrepare debent a momentis, quibus appulſus iſti obſeruati fuiſſent, ſi diſcus Lunae intra diſcum Solis durante obſeruatione immotus perſtitiſſet. Si igitur iuxta methodum ſupra expoſitam conſtructio phaſeos ſuſcipi debeat, neceſſe eſt, vt appulſus cornuum et limbi Lunae ex obſeruatione acquiſiti correctione aliqua tales efficiantur, quales obſeruati fuiſſent, ſi Luna ſitum in diſco Solis interea non mutaſſet.

Pro definiendis eiusmodi correctionibus requiritur, vt ſciatur, qua ratione progreſſus Lunae per diſcum Solis factus ſit. Ad hunc ergo cognoſcendum proiectionem eclipſeos orthographicam effeci ope elementorum, quae calculus ex Tabulis Ludovicianis inſtitutus ſubminiſtrauit, exinde vero poſitionem ſemitae viſae centri Lunae per diſcum Solis determinaui. Exponat figura 3. proiectionem, qua-

 lis

lis pro eclipſi Solari fieri ſolet. Sint ADB ſemidiſcus Terrae, AB Ecliptica, DC circulus latitudinis, PC meridianus vniuerſalis, FI orbita Lunae, o. 1. 2. 3. 4. etc. parallelus Petropolitanus in ſuas horas iuxta numeros 1, 2, 3, 4 etc. diuiſus. Cum momenta initii et finis eclipſeos obſeruata aliquot minutis deſcreparent ab iis, quae calculus praedixerat, conſultum duxi, vt momenta iſta ex obſeruatione acquiſita ſchemati inſererentur. Hunc in finem in parallelo Petropolitano determinaui puncta *i* et *f* reſpondentia reſpectiue momentis initii 5^h, $10'$, $49''$, et finis 7^h, $18'$, $53''$. Ex punctis iſtis *i* et *f* interuallo ſemidiametri penumbrae interſecui orbitam Lunae in I et F; quibus factis obtinui loca centri Lunae in initio et fine eclipſeos, puta in I et F; nec non interuallum I F in orbita Lunae, quod tempori durationis Eclipſeos reſpondet. Inde facillime puncta V. VI. VII. etc. in orbita Lunae definire potui, in quibus centrum Lunae reſpectiue fuit horis V. VI. VII. etc. Iam ex diuiſione paralleli Petropolitani innotuerunt puncta 5. 6. 7. etc. in quibus centrum Solis fuit horis 5. 6. 7. Igitur ad datam quamuis horam poſitio centri Lunae reſpectu centri Solis et circuli alicuius coeleſtis incognita eſſe non potuit. Verbi cauſa ad horam 5tam quaeri debeat poſitio centri Lunae reſpectu centri Solis et circuli declinationis eius. Quoniam hora 5ta centrum Solis eſt in puncto 5. paralleli Petropolitani, per hoc punctum 5. duco rectam G H parallelam ad P C meridianum vniuerſalem; et G H repraeſentat poſitionem circuli declinationis Solis. Sed eadem hora 5. centrum Lunae eſt in puncto V. ſuae orbitae, quamobrem duco V G ad G H perpendicularem,

vt

vt per rectas V G, G 5. acquiram poſitionem centri Lunae reſpectu centri Solis et circuli diclinationis G H. Scilicet hora 5. recta V G exhibet differentiam inter aſcenſiones rectas centrorum Solis et Lunae in diurno; G V 5. vero exponit differentiam declinationum centrorum Solis et Lunae.

Hac methodo ad ſingulos horae quadrantes determinaui differentias aſcenſionum rectarum et declinationum centrorum Solis et Lunae. Deſcripſi deinceps circulum P D Q (fig. 4.), cuius radius C P eſt ad radium diſci Terrae D C (fig. 3), vt ſemidiameter Solis ad parallaxin Lunae horizontalem. (In adiecta fig. 4. circulus P D Q iuſto maior euidentiae cauſa factus eſt). Aſſumta porro diametro P Q pro circulo declinationis, ex cognitis per conſtructionem praecedentem aſcenſionum rectarum et declinationum differentiis ad ſingulos horae quadrantes definiui puncta $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6. etc. in quibus centrum Lunae reſpectiue fuit horis $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6. etc. Denique punctis iſtis ope rectarum inter ſe connexis acquiſiui ſemitam centri Lunae viſam in diſco Solis pro immoto habito. Neceſſe autem fuit, vt ad ſingulos horae quadrantes loca centri Lunae determinarentur,, partim quia portiones ſemitae viſae à centro Lunae ſingulis horae quadrantibus percurſae ex continua parallaxeos Lunae mutatione ſunt inaequales, partim quoniam ipſa ſemita curuam nanciſcitur figuram, dum declinatio Lunae non ſolum ex motu eius proprio, ſed ex variata quoque Lunae parallaxi continuo mutatur.

 His

His praeparatis correctiones obſeruationum ſupra dictas ſequentem in modum inueſtigaui. Exempli loco habitae ſint obſeruationes appulſuum ad filum V T (fig. 2.)

Cornu B $5^h\ 30'.\ 45''$.
curnu A — $31.\ 1\frac{1}{2}$.
peripher. ☽ in M. — $31.\ 17\frac{3}{4}$.
limbi ☉ ſequentis F — $33.\ 6\frac{1}{2}$.

Cum in ſemita centri Lunae viſa (fig. 4) dentur puncta $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, in quibus centrum Lunae extitit horis $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$; ex interuallo horum punctorum 15. minutis temporis reſpondente, ſi motus Lunae in orbita viſa per quadrantem horae vniformis ſupponatur, facile determinari poſſunt puncta f, g, k, in quibus centrum Lunae reſpectiue fuit $5^h.\ 30'.\ 45''$; $5^h.\ 31'\ 1\frac{1}{2}''$, $5^h.\ 31'.\ 17\frac{3}{4}''$. Semidiametro Lunae, cuius ratio ad ſemidiametrum Solis ex calculo eclipſeos datur, centris f, g, k deſcripti ſint arcus B M A, $b\,a$, $\beta\,\mu\,\alpha$, intra diſcum Solis, qui exponent ſitum peripheriae Lunaris in Sole ad dicta reſpectiue momenta. Igitur momento $5^h.\ 30'.\ 45''$. appulit ad filum verticale quadrantis cornu ſeu punctum B peripheriae Solaris, cornu autem A tunc temporis extitit in A. Momento $5^h.\ 31'.\ 1\frac{1}{2}''$ cornu A iam proceſſit in a, adeoque hoc momento punctum peripheriae Solaris a appullit ad filum verticale. Denique momento $5^h.\ 31'.\ 17\frac{3}{4}''$ peripheria Lunae in $\beta m \alpha$ poſita filum quadrantis verticale tetigit. Hi ergo appulſus in diuerſis Lunae intra diſcum Solis poſitionibus obſeruati ſic corrigi debent, vt tales prodeant, quales obſeruati fuiſſent, ſi durante appulſuum obſeruatione Luna ſitum in diſco Solis non mutaſſet.

Ad

Ad circulum declinationis P Q per centrum Solis C ducta ſit normalis D E, quae diurnum Solis repraeſentabit. Igitur cum per ſupra dicta in quauis obſeruatione detur poſitio diurni reſpectu filorum, ad quae appulſus obſeruati ſunt; viciſſim in fig. 4. dabitur poſitio filorum reſpectu diurni D E. Exponat ergo V T filum verticale ad quod appulſus notati ſunt. Per A, *a*, ductae intelligantur A*b*, *ai*, parallelae ad V T et ſecantes diurnum D E in *b* et *i*; et manifeſtum eſt, punctum *b* ſimul cum cornu in A, punctum *i* ſimul cum cornu in *a* ad filum verticale V T appellere. Si igitur detur tempus, quo ſpatiolum *bi* filum V T traiicit, dabitur interuallum temporis inter appulſus cornu in *a* et cornu in A. Expreſſa autem diametro Solis DE per partes temporis, quo diſcus Solis meridianum tranſiit; exponet ſpatiolum *ib* tempus, quo *ib* filum VT traiecit, vnde propter *ib* ex conſtructione datam, dabitur interuallum tempotis inter appulſus cornu in *a*, et cornu in A, veluti in noſtro caſu $= \frac{1}{3}''$. Iam momentum appulſus cornu *a* ad VT ex obſeruatione datur, ſcilicet $5^h.\ 31'.\ 1\frac{1}{2}''$. Subtrahendo igitur ab hoc momento interuallum inuentum $= \frac{1}{3}''$, (quoniam A citius per V T quam *a* tranſiit,) habebitur momentum appulſus ipſius A ad V T, veluti $5^h.\ 31'.\ 1\frac{1}{6}''$, quod eſt momentum, quo cornu in A appuliſſet ad V T, ſi centrum Lunae in *f* immotum perſtitiſſet.

Eodem modo ſi ad V T ducantur paralleiae *qn*. *po*, tangentes reſpectiue limbum Lunae B M A, β *m* α in M et *m*, et ſecantes diurnum D E in *n* et *o*; ſpatiolum *no* exponet interuallum temporis inter appulſus limbi

Lunae $\beta m\alpha$, et B M A ad V T, quod exempli loco in hoc caſu erit $= 1\frac{1}{4}''$. Cum ergo ex obſeruatione detur momentum appulſus limbi Lunae $\beta m\alpha$, nimirum $5^h. 31'. 17\frac{3}{4}''$, ſubducendo interuallum inuentum ab hoc momento (quia B M A citius traiecit V T, quam $\beta m\alpha$) habetur $5^h. 31'. 16\frac{1}{2}''$ pro momento appulſus peripheriae Lunae in B M A, quo caſu centrum Lunae adhuc in f extat.

Ex obſeruatione datur momentum appulſus cornu B, $5^h. 30'. 45''$, centro Lunae in f exiſtente. Vi praecedentis correctionis dantur momenta appulſum cornu A, $5^h. 31'. 1\frac{1}{6}''$, et limbi Lunae B M A $5^h. 31'. 16\frac{1}{2}$, Lunae centro etiam in f haerente; vnde haec momenta inuenta talia ſunt, qualia obſeruata fuiſſent, ſi durante appulſuum obſeruatione limbus Lunae intra diſcum Solis immotus perſtitiſſet, puta in BMA.

Haec ergo momenta ſic correcta in conſtructione phaſeos ſupra expoſita adhiberi debent. Phaſis exinde conſtructa reſpondet momento temporis, quo motus Lunae quaſi cohibetur ſeu quo limbus Lunae in noſtro caſu fuit in B M A, ſcilicet $5^h. 30'. 45''$. Hoc momentum, ad quod phaſis propoſita conſtruitur, voco *momentum obſeruationis*.

Quoniam determinatio memoratarum correctionum a calculo et proiectione eclipſeos pendet, adeoque ex diſſenſu calculi cum coelo in conſtructa pro eruendis correctionibus figura poſitio Lunae intra diſcum Solis nonnunquam diuerſa prodire ſolet ab ea quam Luna ad datum tempus reuera reſpectu Solis habuit; methodo quidem praecedenti correctiones definiui, et phaſin ex obſeruationibus

nibus correctis conſtruxi, aſt vbi hanc ab ea, quam proiectio eclipſeos indicabat, nimis diſcrepantem animaduerti, in conſtructa ex obſeruationibus phaſi correctiones denuo definiui; et exinde nouam phaſeos conſtructionem ad veram magis appropinquautem ſuſcepi.

Vt de phaſibus praecipuis huius Eclipſeos rationem reddam, obſeruationes, ex quibus iſtae conſtructae ſunt, hic tranſcribam, additis correctionibus methodo praecedenti erutis. Eligam autem prae ceteris obſeruationes numeris, 4, 9, 10, 11, 15, in recenſione ſuperiori notatas, quibus praeſertim diametrum Lunae determinaui.

Tempore horologii.

Obſeruat. 4.				Obſeruat. 4. correcta		
S ad —	5^h	28′	6″	5^h	28′	6″
B ad |		30.	$21\frac{1}{2}$		30.	$21\frac{1}{2}$
A ad |		30.	38		30.	$37\frac{2}{3}$
periph. ☽ ad |		30.	$54\frac{1}{4}$		30.	53
I ad —		32.	$28\frac{1}{2}$		32.	$28\frac{1}{2}$
C ad |		32.	43		32.	43

Momentum obſeruationis B ad |
5^h 30′ $21\frac{1}{2}$ horologii vel
5. 30. 45. temporis veri

Obſer-

Obſeruat. 9.				Obſeruat. 9. corect.		
S ad —	5.h 56′	43″		5.h 56′	43″
A et B ad |	57.	40½		57.	40½
periph. ☽ ad |	58.	40½		58.	38½
C ad |	59.	29¼		59.	29¼
I ad —	6. 1.	6½		6. 1.	6½

Momentum obſeruationis B ad |
5.h 57.′ 40½″ horologii vel
5. 58. 1. temporis veri

Obſeruat. 10.				Obſeruat. 10. correct.	
S ad —	6.h 2.′	35″		6.h 2.′	35″
A ad |	4.	8		4.	8
B ad |	4.	30		4.	29⅔
periph. ☽ ad |	5.	28		5.	26
C ad |	6.	2½		6.	2½
I ad —	7.	7		7.	7.

Momentum obſeruationis A ad |
6.h 4′. 8″ horologii vel
6. 4. 26 temporis veri

Obſeruat. 11.				Obſeru. 11. correct.	
S ad —	6.h 14′.	35½″		6.h 14′.	35½″
periph. ☽ ad —	15.	5½		15.	8½
P ad |	15.	53		15.	53
A ad —	17.	41		17.	44¼
B ad —	17.	54		17.	54
C ad |	18.	27½		18.	27½

Momentum obſeruationis B ad —
6.h 17′. 54″ horologii vel
6. 18. 10 temporis veri

Obſer-

	Obſeruat. 15.	Obſeru. 15. correct.
S ad —	6^h 50.′ 29½″	6^h 50′. 29½″
P ad |	52. 24½	52. 24½
periph. ☽ ad |	53. 50	53. 52¼
A ad |	54. 2½	54. 3½
B ad |	54. 47	54. 47
I ad —	55. 12	55. 12

Momentum obſeruationis B ad |
6^h 54′. 47″ horologii vel
6. 54. 57 temporis veri

Deſignant hic S limbum Solis pro apparentia tubi aſtronomici ſuperiorem ; I inferiorem , P praecedentem , C conſequentem. In obſeru. 4, 9, 10, 11, A eſt cornu phaſeos quoad apparentiam ſuperius B inferius ; in obſeru. 15. vero A cornu ſecundum apparentiam inferius , B ſuperius (—) denotat filum in reticulo tubi quadrantis horizontale , (|) verticale.

Ex obſeruationibus iam expoſitis ſemidiameter Lunae deprehenſa eſt

ex obſeruat. 4 — 249
9 — 249½ partium ſcalae , qualium ſemidiameter Solis continet 267.
10 — 249¾
11 — 249½
15 — 251

Conſentiunt et aliae obſeruationes , quas hic breuitatis cauſa omiſi. Aſſumſi ergo pro media Lunae ſemidiametro

metro 250, eamque ad tempus obſcurationis maximae retuli, quo altitudo Lunae viſa ſupra horizontem circiter erat 13°. Inde in hac altitudine prodit ratio diametri Solis ad diametrum Lunae vt 267 : 250. Ex tranſitu Solis per meridianum d. 4. Auguſti ſt. n. innotuit mora tranſitus diſci Solaris per horarium = 2′. 13½″ temporis 1^{mi} mobilis. Inde habetur diameter Solis 31′. 51″ in partibus circuli maximi; adeoque diameter Lunae in iisdem partibus = 29′. 49″, et diameter Lunae horizontalis 29′. 42″, quae ab ea 29′. 40″, quam calculus ex tabulis Ludouicianis praedixerat, non niſi 2″ differt. Si placeat ſecundum tabulas aſtronomicas aſſumere diametrum Solis 31′. 46″; prodibit diameter Lunae 29′. 44″ in altitudine 13°; et diameter Lunae horizontalis 29′. 37″.

Vt ex obſeruationibus, quas ab initio recenſui, deriuari poſſint tempora obſcurationum ſingulorum digitorum, in quos diuiſum concipiunt Aſtronomi diſcum Solis, neceſſe fuit, vt in ſemita centri Lunae viſa ex obſeruationibus ab initio poſitis reſpectu diſci Solaris definita (fig. 1.) cognoſcatur progreſſus Lunae ad ſingulos horae quadrantes. Per tantum enim temporis interuallum motus Lunae viſus absque errore ſenſibili vniformis haberi poteſt, cum caeteroquin motus Lunae in ſemita viſa ex variatione parallaxeos continuo mutetur, et in praeſenti caſu, Luna ad horizontem occiduum vergente, ſemper creſcat. Comparando ergo interualla locorum centri Lunae in ſingulis obſeruationibus ab initio poſitis cum interuallis temporis reſpondentibus, inueni, Lunam in 15. minutis primis temporis veri, dum Luna progreſſa eſt

ab

ab initio Eclipſis vsque ad obſeru. 4 - -		114	partium ſca-
ab obſeru. 4 vsque ad 9 - -		$117\frac{1}{4}$	lae, qualium
9 - - - - 11	abſoluiſſe ſpatium	$121\frac{1}{4}$	ſemidiame-
11 - - - - 15 - -		123	terSolis con-
15 - - - finem - -		127	tinet 267.

His cognitis et diuiſo Solis diſco in ſuos digitos, ope ſemidiametri Lunae in orbita eius viſa definiui loca centri Lunae, in quibus iſtud extitit, dum 1, 2, 3, 4, etc. digiti diſci Solaris obſcurati fuerunt. Innotuerunt ergo diſtantiae horum locorum in ſemita viſa a locis centri Lunae, quae ex obſeruationibus ab initio expoſitis iam cognita erant; vnde etiam ope motus horarii Lunae in ſemita viſa cognoſcebantur interualla temporum reſpondentia, adeoque ipſa temporis momenta, quibus ſinguli digiti obſcurati ſunt.

En deductiones hac methodo erutas,

Tempus verum			
5ʰ	10′.	49″	— — — Initium Eclipſis
	16.	37	— — — digitus 1
	22.	24	— — — — — 2
	28.	19	— — — — — 3
	34.	14	— — — — — 4
	40.	9	— — — — — 5
	46.	0	— — — — — 6
	51.	50	— — — — — 7
	57.	39	— — — — — 8

6.	3.	36	— — — — — 9
	10.	6	— — — — — 10
	16.	54	— — — — — 10. $34\frac{1}{2}'$ obſeruatio maxima, Diſtantia centrorum ☉ et ☽ minima, 2′ 46″ partium circuli max.
	23.	42	— — — — — 10
	30.	5	— — — — — 9
	35.	49	— — — — — 8
	41.	25	— — — — — 7
	46.	52	— — — — — 6
	52.	19	— — — — — 5
	57.	45	— — — — — 4
7.	3.	7	— — — — — 3
	8.	25	— — — — — 2
	13.	41	— — — — — 1
	18.	53	— — — — Finis Eclipſis.

OB-

OBSEVATIO TRANSITVS LVNAE AD SATVRNVM

die $\frac{20.\ April.}{1.\ Maii.}$ an. 1740. Petropoli habita, a *G. Heinſio.*

Exacta motus Lunaris cognitio obſeruatorum operam continuo requirit. Theoria quidem Lunae recentiorum ſtudio certis ſuperſtructa eſt fundamentis; ex quibus variabilis Lunae motus diiudicari debet; ſed data adhuc plurima, non niſi ex obſeruationibus aſtronomicis petenda, deſiderantur, vt illorum ope inaequalitates motus Lunaris à ſe inuicem probe diſcerni, earumque effectus ſub certis Lunae circumſtantiis cognoſci poſſint. Hanc ob cauſam in obſeruatorio Imperiali obſeruationes Lunae tum in meridiano tum extra iſtum, quando Luna fixas vel planetas prope tranſit, aſſiduo inſtituuntur, vt ſufficiens locorum Lunae numerus ex obſeruationibus acquiratur, quae deinceps cum theoria conferri poſſint. Sed commodum hoc, quod obſeruationes eiusmodi praebent, vnicum non eſt. Nexus, qui inter labores in obſeruatorio Imperiali peragendos et molimina obſeruatorum in Siberia et Camtſchatka degentium intercedit, iſtas neceſſario requirit, vt ex comporatione locorum Lunae hic et in aliis locis obſeruatorum, differentiae meridianorum determinari poſſint.

Vtilibus his obſeruationibus merito adnumero tranſitum Lunae ad Saturnum die $\frac{20}{1}$ $\frac{\text{April.}}{\text{Maii.}}$ an. 1740. hic obſeruatum, quem impraeſentiarum expoſiturus ſum.

In eius obſeruatione vſus ſum tubo 8. ped. in cuius foco extenſa erant quatuor fila ad angulos ſemirectos verſus ſe inuicem inclinata. Machina parallactica in ſitum debitum redacta ſuſtinebat tubum, qui in Lunam ita directus fuit, vt limbus Lunae pro apparentia tubi aſtronomici inferior (reuera ſuperior), dum tubum traiiciebat, exacte vnum ex filis iſtis in foco extenſis raderet, quod proinde diurnum Lunae apparentem referebat. Hoc apparatu obſeruaui appulſus limbi Lunae praecedentis et centri Saturni ad filum, quod diurno normaliter inſiſtebat et circulum horarium repraeſentabat, vt inde differentiae aſcenſionum rectarum limbi Lunae praecedentis et Saturni innoteſcerent. Praeterea vero annotaui quoque appulſus centri Saturni ad fila obliqua cum filis diurno et horario angulos ſemirectos formantia, vt exinde differentias declinationum limbi Lunae borealis et centri Saturni colligere poſſem. En deductiones ex obſeruationibus habitis.

Ordo obſer.	Temp. verum.	Differentiae Aſcens. rectarum limbi ☽nae praeced. et centri ♄ni in tempore primi mobilis	Differentiae declinationum limbi ☽nae borealis et centri Saturni exiſtente ♄no boream verſus ab hoc limbo, in partibus circuli maximi.
1.	$8^h. 14'. 34''$	$3'. 13\frac{1}{4}$	$15'. 36''$
2.	— 26. 44	2. $50\frac{3}{4}$	15 54
3.	— 34. 42	2. $36\frac{3}{4}$	16 25

4.

4. 8^h. 41′. 16″	2′. 24¾	16′. 49″
5. — 46 41	2. 15½	17. 20
6. — 53 49	1. 59½	17. 27
7. — 58. 36	1. 51½	18. 1
8. 9. 4. 0	1. 40½	18. 16
9. — 8. 9	1. 32½	18. 37
10. — 12. 13	1. 24	18. 37
11. — 16. 13	1. 16½	18: 51
12. — 19. 53	1. 9¾	19. 19
13. — 35. 14	0. 39	20. 29
14. — 38. 52	0. 32½	20. 36
15. — 42. 2	0. 26¼	20. 53
16. — 44. 59	0. 20	21. 4
17. 9 48. 10	0. 14	21. 11

Saturnus nunc ad tantam à limbo Lunae boreali ſeptentrionem verſus diſtantiam peruenerat, vt fila obliqua reticuli non niſi prope marginem tubi traiiceret, quamobrem ab his obſeruationibus abſtinere debui.

Obſeruationes 5. et 7. quoad differentiam aſcenſionum rectarum limbi Lunae praecedentis et Saturni; obſeruationes vero 2, 6, 10, quoad differentias declinationum limbi borealis Lunae et Saturni, paulisper dubiae cenſendae ſunt.

DE DECLINATIONVM SYDERVM DETERMINATIONE ABSQVE EXACTA ELEVATIONIS AEQVATORIS COGNITIONE.

G. *Heinſius.*

Quantum interſit, vt ſyderum declinationes et aſcenſiones rectae ex obſeruationibus aſtronomicis exactae determinentur, abunde conſtat. Altitudines ſyderum meridianae, habita eleuationis Aequatoris, refractionum, parallaxium ratione, declinationes; momenta culminationum ſyderum relata ad momentum tranſitus Solis per meridianum, aſcenſiones rectas ſuppeditant. Cum igitur praecipuum negotium reſpiciat obſeruationes ſyderum in Meridiano, Aſtronomi inſtrumentum altimetricum muro firmiter ita infigere ſolent, vt planum eius conueniat cum plano Meridiani, diuiſiones autem in limbo inſtrumenti exacte reſpondeant gradibus eleuationis obiecti ſuper horizonte. Hoc pacto facili negotio altitudo ſyderis meridiana obſeruari et ope horologii momentum tranſitus eius per Meridianum annotari poſſunt. Propoſitum meum non eſt, prolixam eiusmodi inſtrumenti deſcriptionem hic exhibendi; cogitata tantummodo quaedam proferam, quae declinationem ſyderis ope huiusmodi inſtrumenti inueſtigandam concernunt, ſic vt poſitio inſtrumenti reſpectu horizontis et eleuatio aequatoris exactiſſime cognitae non praeſupponantur.

Ex

Ex obſeruationibus Solis meridianis prope ſolſtitia hoc inſtrumento peragendis, inueſtigentur puncta diuiſionis in limbo inſtrumenti, quibus altitudines centri Solis ſolſtitiales, maxima aeſtate et minima hyeme reſpondent. Interuallum inter haec puncta in limbo inſtrumenti definiturum eſſet diſtantiam tropicorum; punctum vero medium huius interualli locum aequatoris in inſtrumento, ſi refractio altitudinibus ſyderum nullam mutationem induceret. Accedente refractione, differentia inter refractiones, quae altitudinibus Solis ſolſtitialibus, aeſtiuae et brumali, competunt, dicto interuallo addi debet, vt diſtantia tropicorum vera prodeat. Huius dimidium obliquitatem eclipticae exhibet, quae, ſi ab altitudine Solis ſolſtitiali aeſtiua per refractionem conuenientem correcta aufertur, in limbo inſtrumenti punctum manifeſtat, quod aequatori coeleſti reſpondet. Iam ſi in tranſitu alicuius ſyderis per meridianum, diſtantia eius ab hoc puncto obſeruetur, eique refractio, quae altitudini ſyderis obſeruati conuenit, applicetur, addendo, ſi declinatio ſyderis ſit auſtralis, ſubtrahendo, ſi borealis; habebitur vera ſyderis declinatio.

Videtur quidem haec methodus requirere altitudines ſyderum cognitas, adeoque poſitionem inſtrumenti reſpectu horizontis cognitam, vt ex altitudinibus refractio conueniens inueniri poſſit; quod etiam verum eſt de ſyderibus prope horizontem meridianum traiicientibus, vbi refractio ad exiguam altitudinis mutationem ſenſibiliter variatur. Aſt vbi ſydera vltra 10. vel 12. gradus eleuata meridianum tranſeunt, in quantitate refractionis parum peccabitur etiamſi altitudo ſyderis ad aliquot minuta incerta

 ſit,

ſit, ita, vt hoc modo altitudines ſyderum praeter propter ſcire ſufficiat. Hunc caſum praecipue reſpicio, cum prior caſus obſeruationis ſyderis ad horizontem tantis erroribus obnoxius ſit, vt iſtum Aſtronomi, quantum fieri poteſt, ſemper euitare ſtudeant.

Perſuaſum igitur habeo, in iis Terrae regionibus, in quibus altitudo ſolſtitialis brumalis 25 gradus ſuperat, hanc methodum probe ſucceſſuram eſſe; cum differentia refractionum, quae in hoc caſu altitudinibus ſolſtitialibus competunt, ſatis exacta habeatur, vt inde nullus error ſenſibilis in determinatione diſtantiae tropicorum verae exſurgat. Inueſtigatio autem declinationis ſyderis ex hac methodo reſultans ei praeſtare videtur, in qua eleuatio aequatoris et ſyderum altitudines meridianae exactae praeſupponuntur; ſaltem in iſta euitantur examina inſtrumentorum, quibus cognoſcere debemus an diuiſiones in limbo inſtrumenti gradibus altitudinis ſyderis ſuper horizonte recte reſpondeant; quae vero multis ſaepe difficultalibus praeſertim ſi inſtrumentum ſit praegrande vel muro iam infixum, premuntur, et ſubinde errores haud exiguos in definiendis altitudinibus producunt.

In iis regionibus, in quibus Sol tempore ſolſtitii brumalis parum ſuper horizonte in meridiano eleuatus conſpicitur, veluti in his terris; methodus hactenus expoſita non aeque ſuccedet, cum maiores et variabiles in vicinia horizontis refractiones determinationi diſtantiae tropicorum verae errores nimios inducere valeant. Econtrario ſi in his locis intrumentum murale in ſeptentrionali plaga extet vt opè iſtius ſtellae circumpolares in meridiano ſupra et

infra

inſra polum obſeruari poſſint; methodo, praecedenti ſimili, locum in inſtrumento definire licebit, qui vero loco poli coeleſtis reſpondet; a quo deinceps diſtantiae ſyderum a polo, habita refractionum ratione, computari poſſint; vt adeo, absque exacta eleuationis Poli vel Aequatoris cognitione, ſyderum declinationes innoteſcant.

Cum in poſteriori hoc caſu inſtrumentum murale auſtralem coeli regionem reſpiciens non admittat exactam per altitudines Solis ſolſtitiales determinationem loci in inſtrumento, qui Aequatori coeleſti reſpondeat; cogitationes ſubortae ſunt, an non alia quaeuis Solis loca in inſtrumento obſeruata ad exactam iſtiusmodi loci Aequatori reſpondentis definitionem conducere poſſint. Differentiae Aſcenſionum rectarum et Declinationum Solis in tribus diuerſis Eclipticae locis exiſtentis huc facere videbantur.

Sint E C Ecliptica, E G aequator, in E punctum aequinoctiale, Sol autem primo in A deinceps in B et denique in C. Per A, B, C, intelligantur circuli declinationum A D, B F, C G; A *c* ſit circulus Aequatori parallelus: et erunt D F, D G differentiae Aſcenſionum rectarum; B *b*, C *c* differentiae Declinationum locis Solis B et A, C et A reſpondentium. Dentur iam dictae differentiae D F, D G, B *b*, C *c*; patebit via perveniendi ad determinationem Declinationis A D, Aſcenſionis rectae E D, et obliquitatis Eclipticae A E D. Aſſumendo enim expreſſiones incognitarum A D, E D et A E D, dabuntur expreſſiones arcuum E F, E G, B F, C G; et ex analyſi triangulorum ſphaericorum rectangu- Tab. XI. fig. 5.

 lo-

lorum A E D, B E F, C E G quaeſtio ad aequationem redigi poteſt. Calculum tentaui, qui vero tam prolixus et intricatus euaſit, vt nulla ſpes ſuperfuerit, eum conciſiorem reddendi et in vſum transferendi. Nec medela allata eſt, etiamſi obliquitatem Eclipticae A E D cognitam ſtatuerem, et ex differentia Aſcenſionum rectarum D F et differentia Declinationum B *b*, Declinationem A B et Aſcenſionem rectam E D quaererem.

Data, quae ad ſolutionem huius problematis requiruntur, per obſeruationes aſtronomicas admodum exacta haberi poſſe videntur. Obſeruando Solem per inſtrumentum murale in diuerſis limbi eius locis, ex horum interuallo differentiae declinationum immediate innoteſcunt, absque praeuia ſitus inſtrumenti reſpectu vel Horizontis vel Aequatoris cognitione. Cum autem neceſſe ſit, vt diuerſitatis refractionis, quae differentiae declinationum obſeruatae applicari debet, ratio habeatur: ſufficit altitudines meridianas Solis tempore obſeruationum praeterpropter ſcire, vt ope iſtarum differentiae refractionum conuenientes ex tabulis inueniri poſſint. Hae refractionum differentiae eo certiores ſunt, quo maiores ſunt altitudines Solis meridianae tempore obſeruationum, quas hic requiro; vt adeo certitudo differentiae declinationum quaeſitae ſolummodo pendeat ab exactitudine obſeruationis et bona inſtrumenti conſtitutione; quae requiſita in omnibus aliis obſeruationibus ſupponuntur. Differentiae Aſcenſionum rectarum Solis aeque exactae per obſeruationes acquiri poſſe videntur. Ex altitudinibus Solis reſpondentibus meridies verus certo inueſtigatur. Si tubus reticulo inſtructus in fi-

xam

xam claritate conſpicuam in quacunque coeli plaga (praeſtat prope Meridianum) extantem dirigatur, et in hoc ſitu ita firmetur, vt nullam poſitionis ſuae mutationem ſubire poſſit; ſingulis tunc fixae reuolutionibus etiam interdiu iſta per tubum memoratum obſeruari peterit. Dabitur ergo per obſeruationes interuallum temporis inter tranſitum Solis per Meridianum et tranſitum fixae per reticulum ſui tubi. Si iam eiusmodi interualla diuerſis diebus notata inter ſe comparentur, innoteſcet, quantum Sol interea ad fixam acceſſerit vel ab ea receſſerit in Aequatore, hoc eſt, dabuntur Differentiae Aſcenſionum rectarum Soli temporibus obſeruationum, competentium.

Cum tantam in acquiſitione datorum, quae praecedens problema requirit, facilitatem et certitudinem animaduerterem; ipſum vero problema calculum aptum non admitteret; iſtud paululum mutaui, vt tractabilius euaderet. Introduxi ſcilicet iter a Sole in Ecliptica confectum ab vna obſeruatione vsque ad alteram. Sint, vt ante, E C Ecliptica E G aequator, E punctum aequinoctiale, Fig. 6. Sol primo in A, deinde in C obſeruatus; A D, C G circuli declinationum in polo aequatoris P concurrentes; C c differentia declinationum, D G differentia aſcenſionum rectarum, vtraque per obſeruationes data. Suppoſui ergo, dari quoque arcum Eclipticae A C, quem Sol ab vna obſeruatione vsque ad alteram emenſus eſt Hoc ſuppoſitum quidem non admittendum eſſe prima fronte videtur, cum theoriam Solis requirat adeoque hypoteſin obſeruationibus immiſceat. Attamen re perpenſa credidi, parum peccari poſſe in determinatione quantitatis arcus A

C, vt iſtum absque periculo erroris nimii ſupponere liceret. Ponamus enim Solem aequabili motu per Eclipticam ferri; et manifeſtum eſt, ex interuallo temporis inter obſeruationes Solis in A et C exacte haberi poſſe arcum A C, ob tempus periodicum Solis datum. Cum Sol in Ecliptica vniformiter non moueatur, motus eius aequabilis ſeu medius, cuius quantitas ex dato tempore cognoſcitur, corrigi ſolet per aequationes centri Solis, ita vt motus Solis verus per A C innoteſcat ex motu eius medio (tempori, quo Sol ex A in C peruenit, reſpondente) comparato cum differentia aequationum centri Solis locis eius in A et C competentium. In determinatione motus medii ex dato tempore parum vel nihil peccari poteſt. Quod ad differentiam aequationum centri locis Solis in A et C conuenientium, in iſta parum quoque errari poſſe credo. Aberrent enim loca Solis per tabulas aſtronomicas computata aliquot minutis a locis, in quibus Sol tempore obſeruationum reuera verſatus eſt; haec tamen aberratio exiguum errorem producet, cum variatio aequationis variationi vnius Gradus in anomalia media reſpondens nondum ad 2. minuta aſcendat, ſi maxima ſit; vt adeo aequatio loco Solis ex calculo cempetens parum differe poſſit ab aequatione quae loco Solis in celo reſpondet, praeſertim in illis caſibus, in quibus aequatio per vnum anomaliae mediae gradum lente variatur. Differentia ergo aequationum ex tabulis parum diſcrepare debet a differentia aequationum, quae locis Solis in A et C reuera reſpondent. Imo cum quaeſtio ad differentias reducta ſit, error exiguus ad modum erit etiamſi in ſitu Apogaei et magnitudine excentricitatis orbitae Solaris tabulae aſtro-

aſtronomicae a ſe differant; quo caſu quidem ipſae centri Solis aequationes in vna tabula diuerſae erunt ab homologis aequationibus in altera tabula; differentia tamen duarum aequationum in vna tabula non multum abludet a differentia aequationum homologarum in altera, cum homologae aequationes ſimiliter fere varientur in orbitis eclipticis, quarum Excentricitates non multum a ſe inuicem diſcrepant prouti fit in ſpecie orbitae Solaris iuxta diuerſas tabulas conſiderata. Rem exemplum infra declarabit.

Detur ergo per tabulas aſtronomicas arcus eclipticae A C, quem Sol ab vna obſeruatione vsque ad alteram peragrauit. Dentur praeterea ex obſeruatione differentia Declinationum C *c* et differentia aſcenſionum rectarum D G ſeu angulus D P G vel A P C; et quaeſtio huc reducta erit, vt in tranngulo Sphaerico A P C, ex datis arcu A C, angulo A P C, et differentia laterum A P, P C, quae eſt C *c*, inueniatur latus P C complementum declinationis C G quaeſitae: quo P C dato inueniri quoque poteſt angulus P C A, eiusque complementum ad duos rectos E C G, ex quo et declinatione inuenta C G in triangulo E C G ad G rectangulo innoteſcent, obliquitas Eclipticae C E G, aſcenſio recta E G, longitudo Solis E C:

Pro ſolutione problematis praecedentis ſint

A C $= a$	P C $= x$
C *c* $= b$	P A $= x + b$
A P C ſeu P $= p$	P A + P C $= 2x + b$
	P A − P C $=$ C *c* $= b$

Iam

Iam per theorema Cl. Euleri in Tom. IV. Comment. p. 98. poſito ſinu toto $= 1$, eſt

$$\text{coſ. } AC = \frac{\text{Coſ.}(PA + PC) + \text{coſ.}(PA - PC) + \text{coſ.} P . \text{coſ.}(PA - PC) - \text{coſ.} P . \text{coſ.}(PA + PC)}{2}$$

ſeu introductis ſymbolis

$$\text{coſ. } a = \frac{\text{coſ.}(2x + b) + \text{coſ.} b + \text{coſ.} p . \text{coſ.} b - \text{coſ.} p . \text{coſ.}(2x + b)}{-2}$$

Facta ergo terminorum transpoſitione inuenitur

$$\text{coſ.}(2x + b) = \frac{2 . \text{coſ.} a - \text{coſ.} b - \text{coſ.} p . \text{coſ.} b}{1 - \text{coſ.} p}$$
$$= \frac{2 . \text{coſ.} a - \text{coſ.} b - \text{coſ.} p . \text{coſ.} b}{\text{ſin. verſ.} p .}$$

vt hoc problema exemplo illuſtrarem, elegi obſeruationes Solis et Sirii diebus 26. Aprilis et 24. Maii ſtylo nouo anno 1740. inſtitutas. Tranſitum Solis per meridianum ex altitudinibus eius reſpondentibus determinaui; Sirium vero obſeruaui in ſextante murali, nulla habita ratione, an tempus tranſitus Sirii per reticulum huius inſtrumenti conueniat cum tempore culminationis eius verae, nec ne d. 26. Aprilis deprehendi interuallum inter meridiem verum et tranſitum Sirii per ſextantem muralem $4^h\ 17'\ 32''$ temporis primi mobilis d. 24. Maii iſtud interuallum inveniebatur $2^h\ 28'\ 16\frac{1}{2}''$ temporis primi mobilis. Differentia igitur horum interuallorum eſt $1^h\ 49'\ 15\frac{1}{2}''$, cui reſpondet arcus Aequatoris $27°\ 18.\ 52'' =$ DG ſeu ang. APC, ſi Sol d. 26. Aprilis in A, d. 24. Maii in C extitiſſe ponatur, d. 26. Aprilis altitudinem limbi ſuperioris Solis in Sextante murali notaui $43°\ 59'\ 45''$; d. 24. Maii, $51°\ 10'\ 52''$, non attendendo, an hae altitudines ſint iuſtae, an vero propter aberrationem inſtrumenti a ſitu horizontali correctione aliqua indigeant. Prodit inde differentia declinationum $7°\ 11'\ 7''$ cui propter differentiam refractionum et mutatam Solis ſemidiametrum addi

debent

debent 17″, vt vera declinationum differentia prodeat 7° 11′ 24″ = C*c*. Differentiam parallaxium Solis quippe inſenſibilem hic neglexi.

Pro arcu AC obtinendo, quem Sol a meridie vero d. 26. Aprilis vsque ad meridiem verum d. 24. Maii in Ecliptica emenſus eſt, computum ex tabulis tum *de la Hire*, tum *Caſſini* inſtitui. Ex prioribus inueni locum Solis medium d. 26. April: meridie vero Petropoli 1ˢ 4° 41′ 11″ et d. 24. Maii 2ˢ 2° 17′ 2″; vnde motus Solis medius interea factus eſt 27ᵇ 35′ 51″. Aequatio centri Solis d. 26. April. erat 1° 42′ 53″ addit. et d. 24. Maii 1° 7′ 21″ addit.; hinc differentia aequationum prodit = 35′ 32″, quae ex motu medio 27° 35′ 51″ ſubducta relinquit motum Solis verum ſeu arcum AC = 27° 0′ 19″. Ex tabulis *Caſſini* ad meridiem verum Petropoli d. 26. April. deprehendi locum Solis medium 1ˢ 4° 41′ 12″; d. 24. Maii 2ˢ 2° 17′ 10″ quapropter motus Solis medius interea factus eſt 27° 35′ 58″. Aequatio centri Solis loco priori reſpondebat 1° 43′ 44″, loco poſteriori 1° 7′ 30″ vtraque additiua. Si differentia aequationum 36′ 14″ auferatur ex motu medio 27° 35′ 58″, reſtat motus Solis verus ſeu arcus AC = 26° 59′ 44″. Occurrit ergo in determinatione arcus AC ex tabulis *de la Hire* et *Caſſini* differentia 35″, quae tolerari poſſe videtur, vt autem eo minus a vero aberrem, inter vtrumque arcus AC valorem accepi medium 27° 0′ 2″. Ex hoc ergo computu dantur

C*c* ſeu b = 7° 11′ 24″. Coſin. b = 9921365
ang. P ſeu p = 27° 18′ 52″. Coſ. p = 8885015
Sinus. verſus p = 1114984
AC ſeu a = 27° 0′ 2″. Coſ. a = 8910021

 Hinc

Hinc $2.\ \text{coſ.}\ a = 17820042$

$2.\ \text{coſ.}\ a - \text{coſ.}\ b = 7898677$

$\text{coſ.}\ b\ .\ \text{coſ.}\ p = 8815148$, ſi ſinus totus $= 1$.

Quapropter, ſi hi valores ſubſtituantur in formula

$$\text{coſ.}\ (2x + b = \frac{2.\ \text{coſ.}\ a - \text{coſ.}\ b - \text{coſ.}\ p.\ \text{coſ.}\ b}{\text{Sin. verſ.}\ p}$$

prodibit $\text{coſ.}\ (2x + b) = \frac{-916471}{1114534} \times \text{Sin. tot.}$ (ſeu 10000000)

$$-\text{coſ.}\ (2x + b) = 8219589$$

$$= \text{ſin.}\ 55^\circ.\ 16'.\ 53''\ \text{vel coſ.}\ 34^\circ.\ 43'.\ 7''$$

Igitur ob coſ. $(2x + b)$ negatiuum, erit

$2x + b =$ Complemento $34^\circ.\ 43'.\ 7''$ ad duos rectos

$= 145^\circ.\ 16'.\ 53''$.

et $x = 69^\circ.\ 2'.\ 44\frac{1}{2}'' = PC$ ſeu diſtantiae Solis a polo d. 24. Maii; vnde hoc die declinatio centri Solis inuenitur $20^\circ.\ 57'.\ 15\frac{1}{2}''$.

Vt innoteſcat, quantum declinatio ſic inuenta conueniat cum declinatione methodo ordinaria definita, ex ſuppoſita Aequatoris eleuatione et altitudine Solis meridiana d. 24. Maii per idem inſtrumentum murale obſeruata adhibitis debitis correctionibus, declinationem Solis inueſtigaui quam $20^\circ.\ 53'.\ 12''$. inueni, quae a priori $4'.\ 3\frac{1}{2}''$. differt. Vnde tanta diſcrepantia? De poſteriori declinatione certus ſum, in illa errorem locum habere non poſſe, qui ad dimidiam minuti partem aſcendat. E contrario de certitudine Datorum et calculi, ex quibus declinatio prior innotuit, nullus quoque ſcrupulus ſupereſt. Cogitationes igitur ſubortae ſunt, an non ex erroribus illis exiguis, a quibus obſeruationes, etiamſi omnis cura adhibeatur, liberari nequeunt, tantus denique error conflatus ſit.

Vt hac de re certus fierem, exemplum elegi, in quo quaeſitum iam conſtabat. Data huius exempli deinceps paululum mutaui, eaque talia effeci, qualia prodire poſ-

poſſent, ſi ipſis errores, qui in obſeruationibus committi queunt, adhaererent. Ea, quae exinde reſultabant, denique comparaui cum quaeſito iam cognito, vt innoteſceret, quantus error in quaeſito per errores obſeruationum produci poſſet. Sint in A 20° ♈, in C 24° ♉. Ex tabulis igitur aſtronomicis erunt $ED = 18°. 27'. 37''$, $EG = 51°. 36'. 55''$, $AD = 7°. 50'. 0''$, $CG = 18°. 48'. 25''$, vnde AC ſeu $a = 34°$, DG ſeu $p = 33°. 9'. 18''$, Cc ſeu $b = 10°. 58'. 25''$; quaeſitum autem PC ſeu $x = 71°. 11'. 35''$. Tantus praeciſe arcus PC quoque prodit, ſi ex datis a, b, p, iuxta problema ſuperius quaeritur. Cogitemus iam b et p ex obſeruationibus; a vero ex tabulis Solaribus deſumta eſſe. Ponamus in p ſeu ang. A P C per obſeruationes errorem vnius minuti commiſſum eſſe, quod facile fieri poteſt. Si enim in obſeruatione meridiei peccetur vno ſecundo temporis et in obſeruatione fixae itidem vno ſecundo error in interuallo harum obſeruationum ad 2'', aſſurgere poteſt. Duo iam eiusmodi interualla inter meridiem et obſeruationem fixae requiruntur pro determinando angulo A P C; quapropter ſi alteri interuallo etiam errorem 2'' adſcribamus, in determinationem anguli A P C error 4'' irrepere valet, qui in quantitate anguli A P C errorem vnius minuti producit. Ponamus porro in b ſeu in differentiam declinationum Cc per obſeruationes introductum eſſe errorem 20'', quod fieri poſſe patet, cum ad determinationem ipſius Cc requirantur duae obſeruationes quarum quaelibet errori 10'' ſubiecta eſt. Denique in quantitate ipſius a ex tabulis Solaribus deſumta facillime error 30'' locum habere poteſt.

Introducantur iam hi errores ſuppoſiti in data ſuperiora et fiant.

$a =$

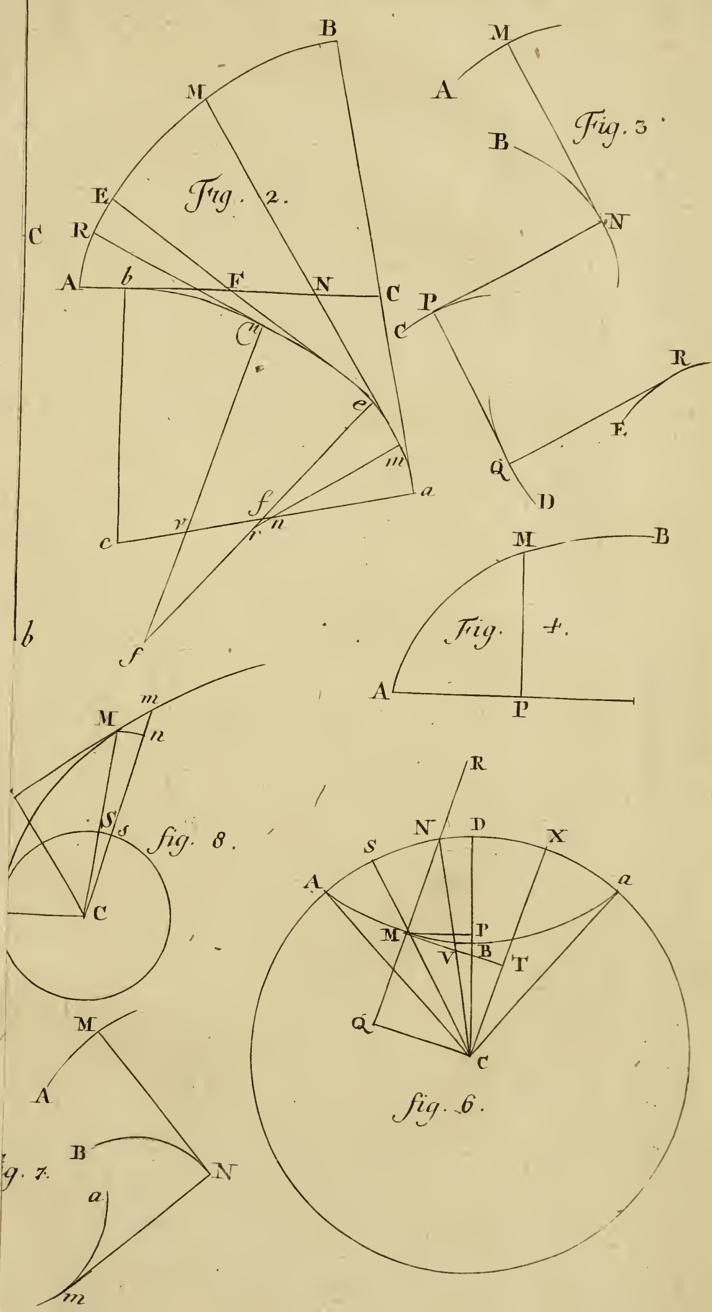
$a = 34^\circ.\ 0'.\ 30''.$
$b = 10.\ 58.\ 5.$
$p = 33.\ 10.\ 18.$

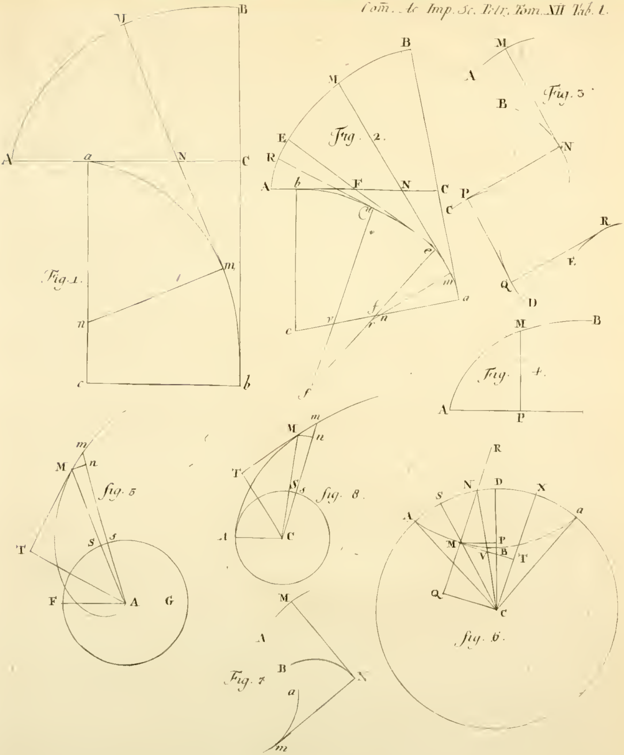
quibus factis inuenietur P C ſeu $x = 71^\circ.\ 9'.\ 26\frac{1}{2}''$, qui a vero arcus P C valore differt $2',\ 8\frac{1}{2}''$.

Ponantur $a = 33^\circ.\ 59'.\ 30''.$
$b = 10.\ 58.\ 5.$
$p = 33.\ 10.\ 18.$

et deprehendetur $PC = 71^\circ.\ 1'.\ 50\frac{1}{2}''$, qui a vero eius valore diſcrepat $9'.\ 44\frac{1}{2}''$.

Et hac ratione combinando errores cum Datis ſuperioribus hoc vel illo modo plures ſuppoſitiones fieri poſſunt, quas vero vlteriori calculo proſequi non opus eſſe iudico. ſufficit hoc exemplo indicaſſe, problema noſtrum ita comparatum eſſe, vt committendo exiguos etrores in Datis ingens error in Quaeſito exſurgat. Plura eius modi problemata in aſtronomicis occurrere ſolent, quae iuxta theoriam quidem vſum eximium ſpondent, in applicatione vero ad exempla omni vſu deſtituuntur, dum errores exiguos exaggerant. Aſtronomia per eiusmodi theorias parum prouehitur, et omnino intereſt, vt propoſitiones iſtius conditionis innoteſcant. Examinanda ſunt problemata et iſta ſeligenda, quae errores ab obſeruationibus inſeparabiles magis magiſque imminuunt. Ratio huius ſcripti inde patet; et facile nunc perſuaſum habeo, problema ſuperius, quo ex datis differentiis Aſcenſionum rectarum et Declinationum Solis Aſcenſiones rectae et Declinationes ipſae inueniri debent, quoque calculum reſpicit, vſum denegaturum eſſe, etiamſi, quocunque artificio, elegans et conciſa formula algebraica pro ſolutione iſtius exhiberi poſſet.


Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
fig. 6.
g. 7.
fig. 8.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
fig. 5
fig. 6.
Fig. 7
fig. 8.



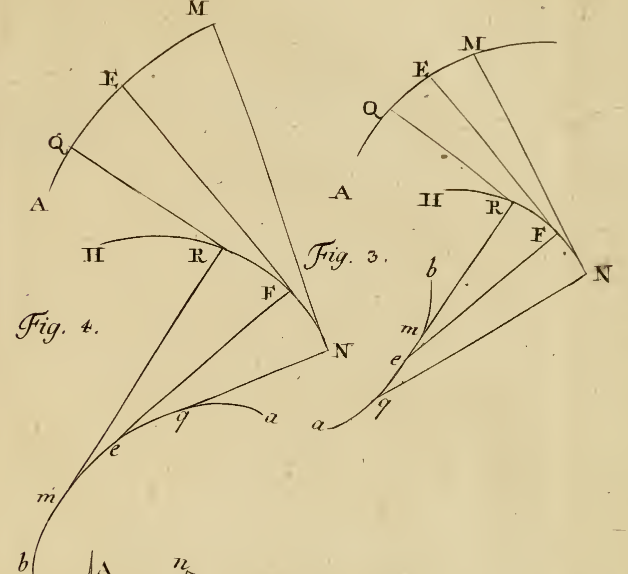


Fig. 3.

Fig. 4.

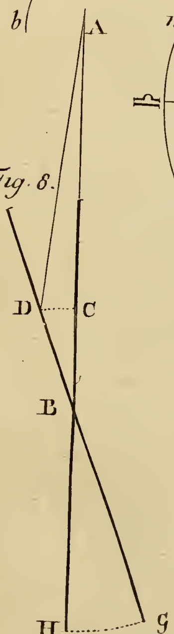


Fig. 8.

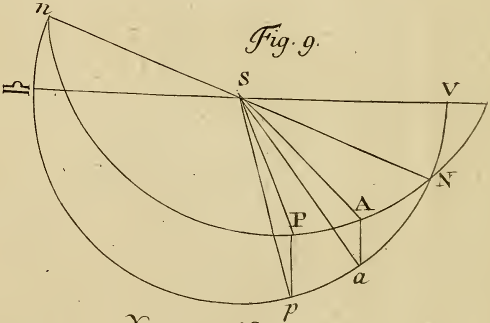


Fig. 9.

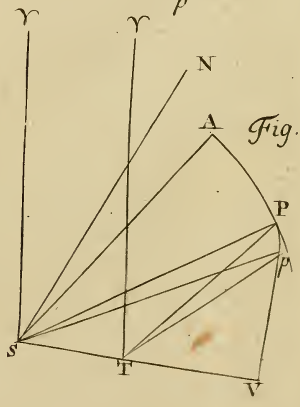
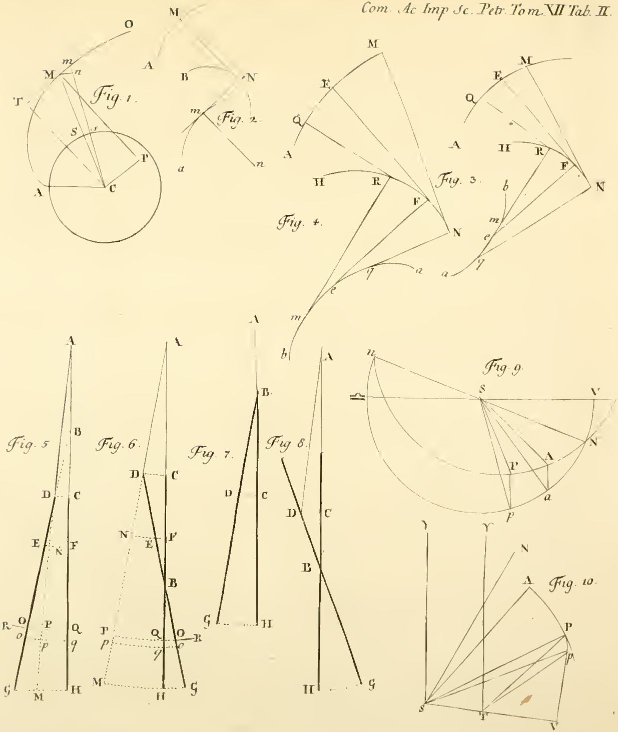
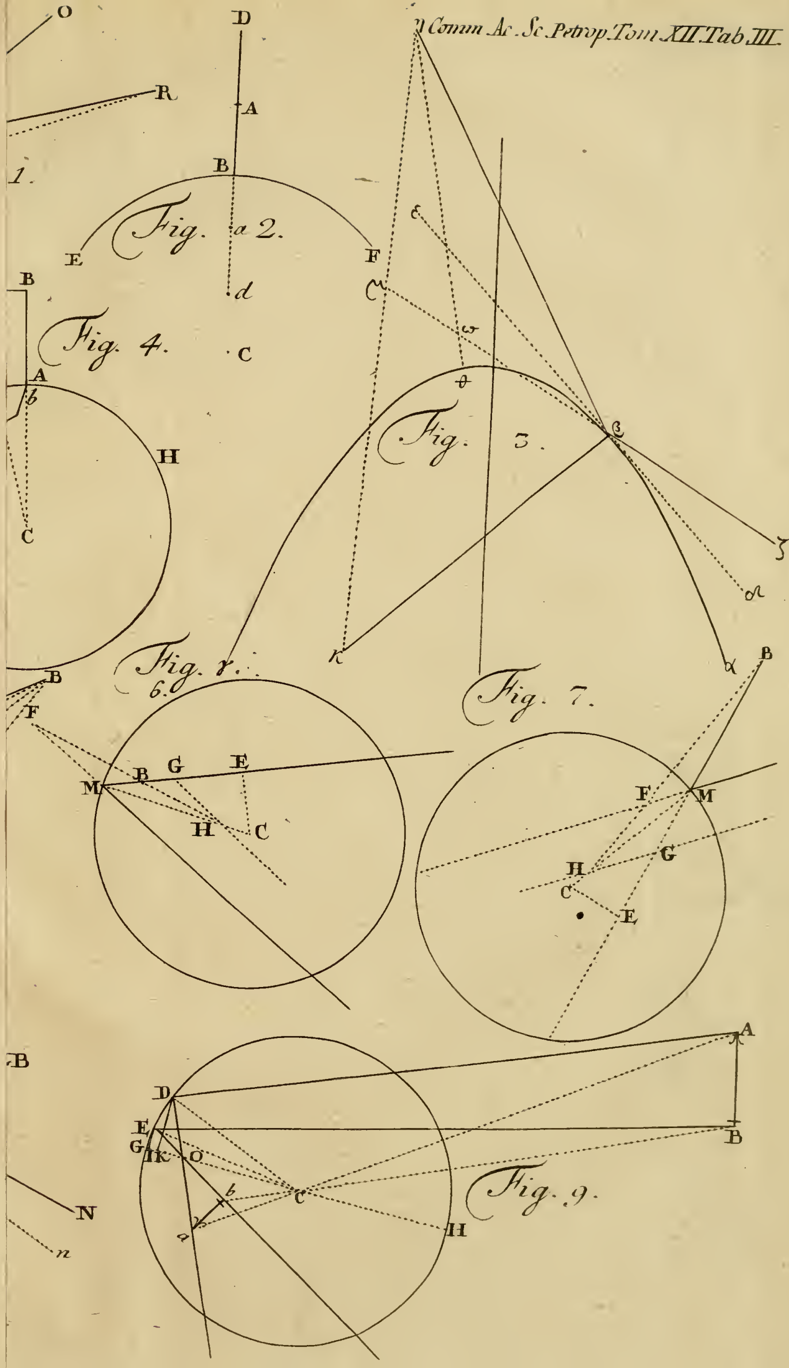


Fig. 10.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig 8.
Fig. 9.
Fig. 10.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
O
R
D
A
B
E
F
a
d
C
b
H
M
G
K
N
n

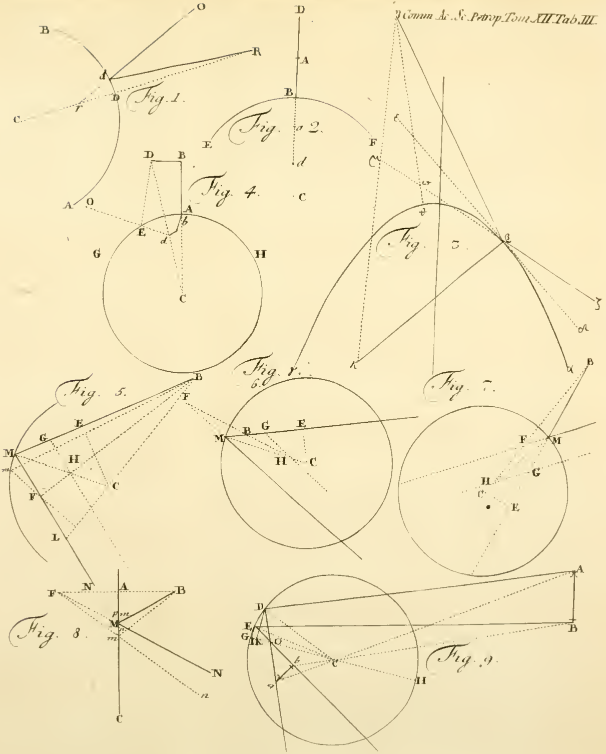


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

ig. 1.

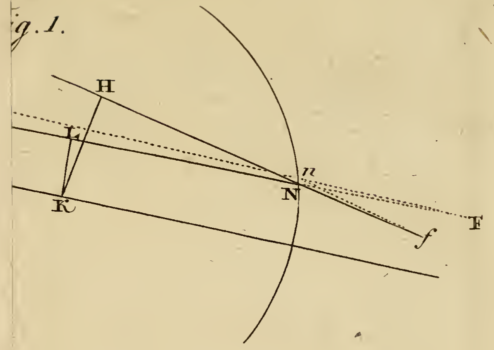
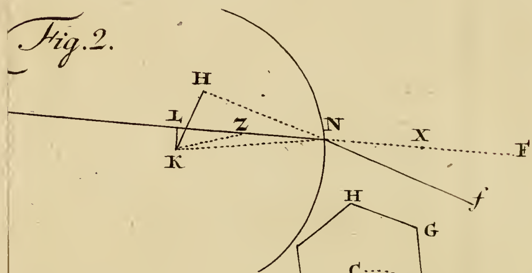


Fig. 2.



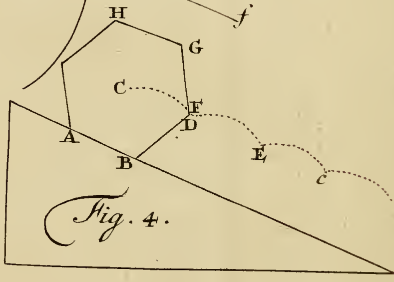
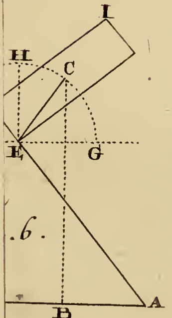


Fig. 4.



.6.

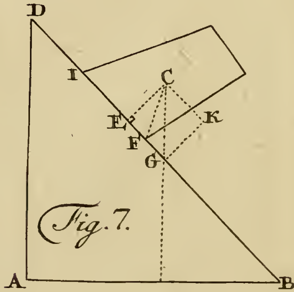


Fig. 7.

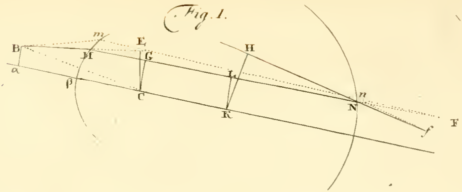


Fig. 1.

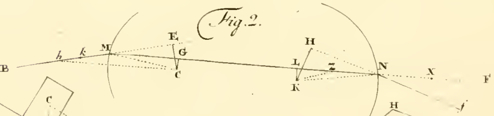


Fig. 2.

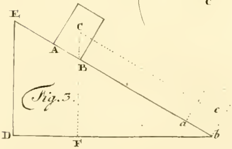


Fig. 3.

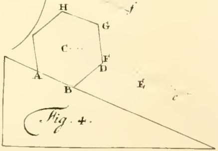


Fig. 4.

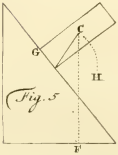


Fig. 5.

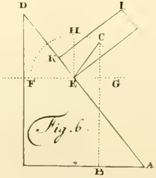


Fig. 6.

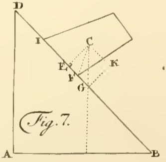


Fig. 7.

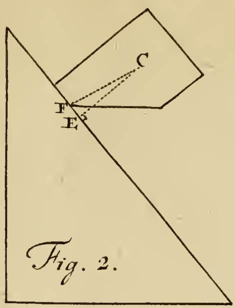


Fig. 2.

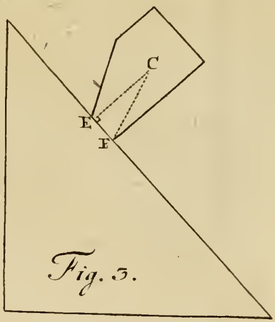


Fig. 3.

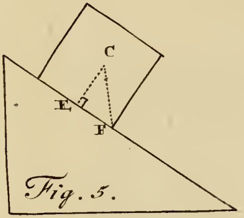


Fig. 5.

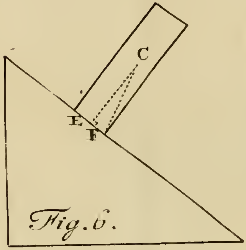


Fig. 6.



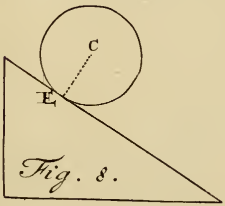


Fig. 8.

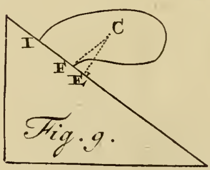


Fig. 9.

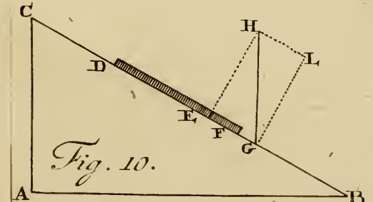
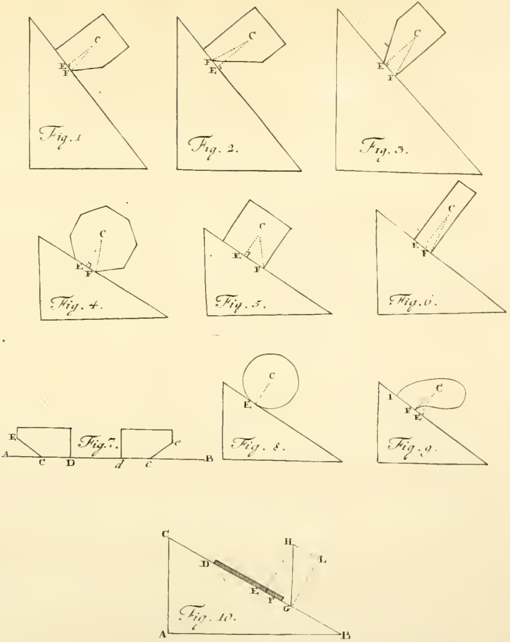
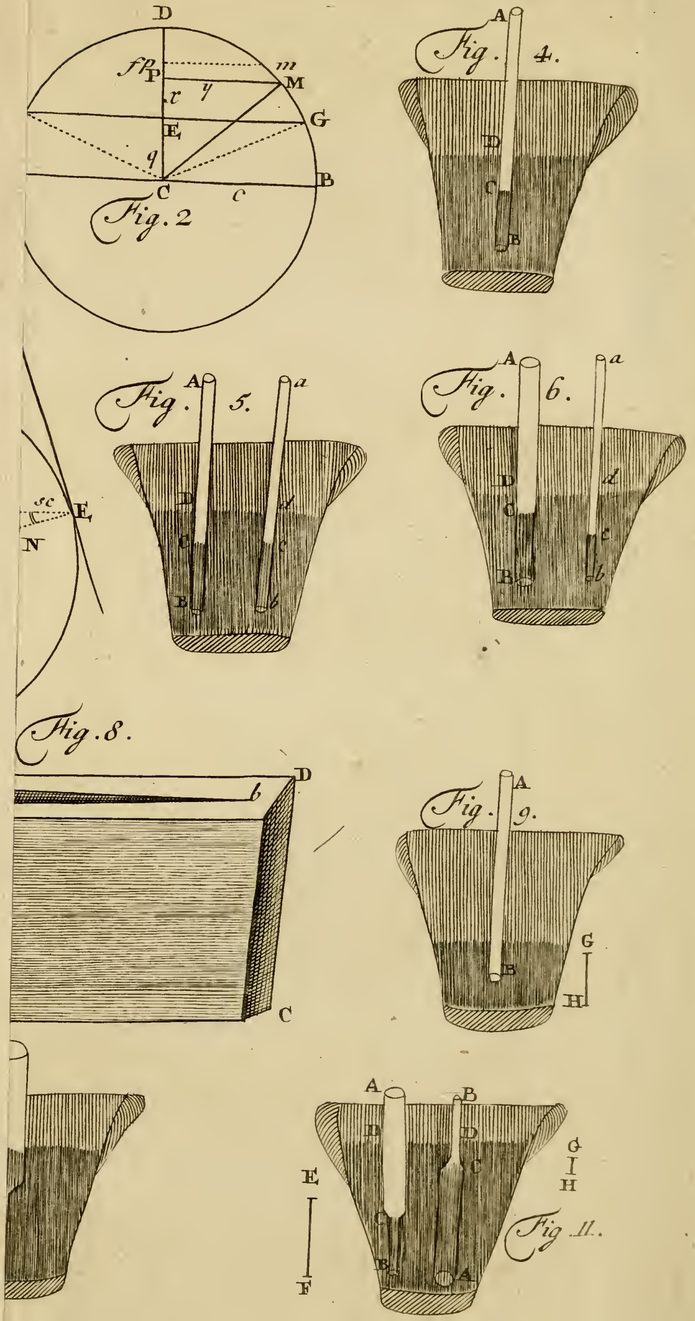


Fig. 10.


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.


Fig. 2
D
fp P
m
M
x
y
G
E
q
C
c
B
Fig. 4.
A
D
C
B
Fig. 5.
A
a
D
d
C
c
B
b
Fig. 6.
A
a
D
d
C
c
B
b
sc
E
N
Fig. 8.
D
b
C
Fig. 9.
A
B
G
H
Fig. 11.
A
B
D
D
C
C
B
A
E
F
G
H

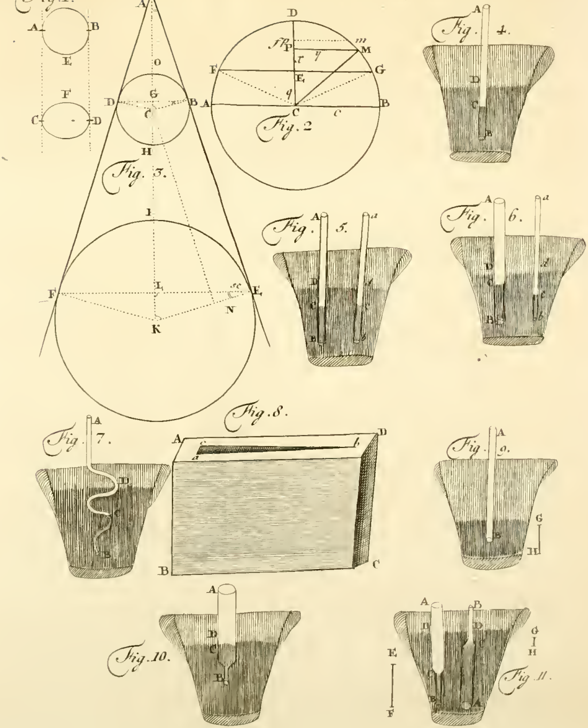

Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

Fig 2

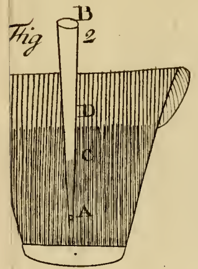


Fig. 3.

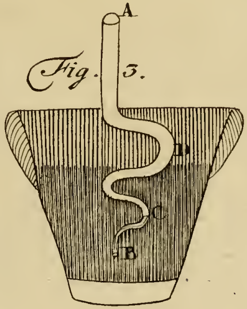
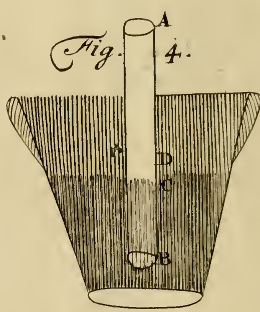


Fig. 4.



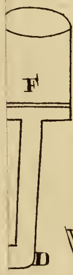


Fig. 6.

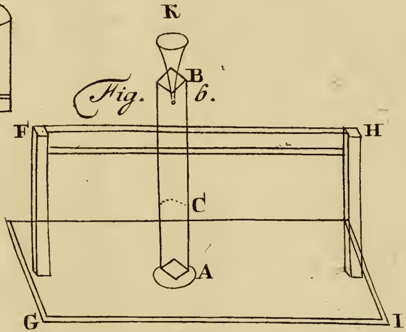


Fig. 7.

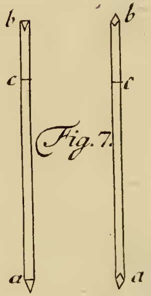


Fig. 9.

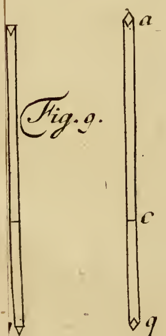
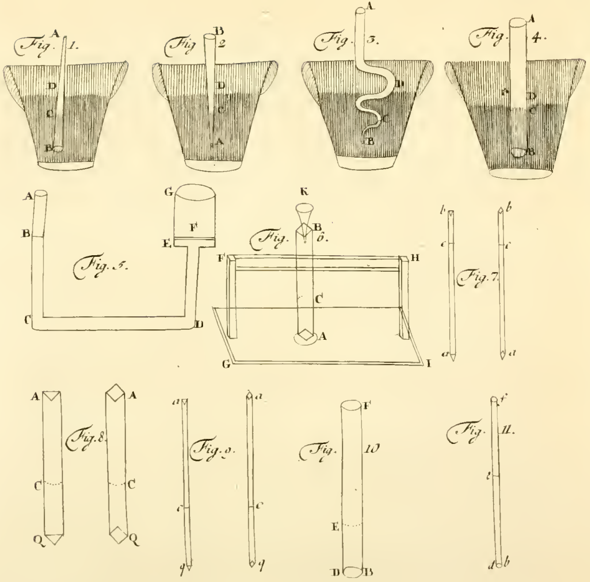


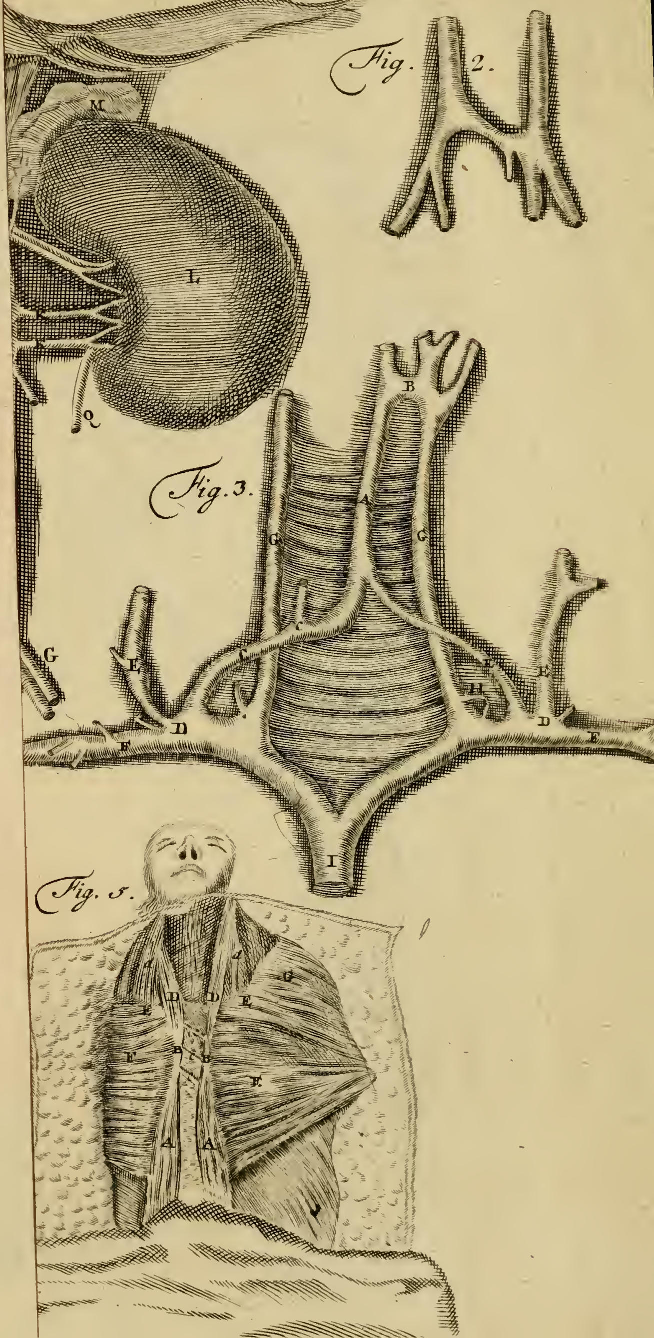
Fig. 10



Fig. 11.




Fig. 1.
A
D
C
B
Fig 2
B
D
C
A
Fig. 3.
A
D
C
B
Fig. 4.
A
F
D
C
B
A
B
C
D
E
F
G
Fig. 5.
K
B
Fig. 6.
F
H
C
A
G
I
Fig. 7.
b
c
a
Fig. 8.
A
C
Q
Fig. 9.
a
c
q
Fig. 10
F
E
D
B
Fig. 11.
f
e
d
b


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.

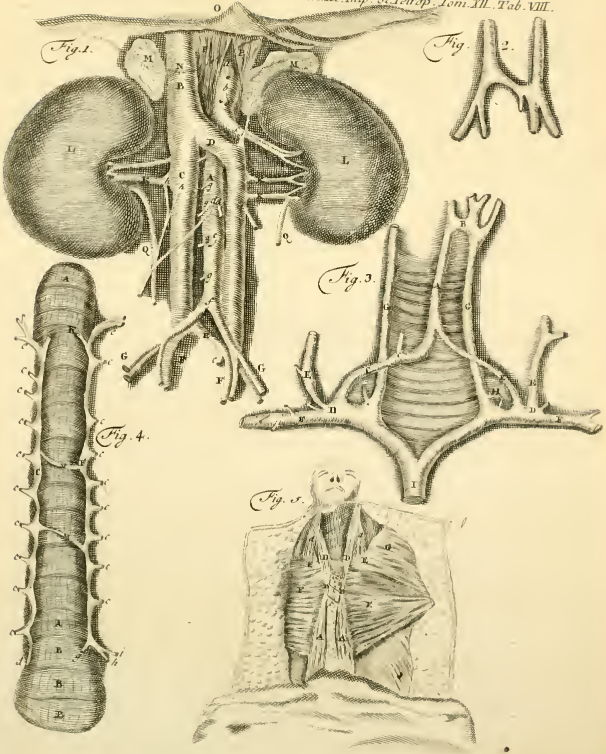

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

Fig. 2.

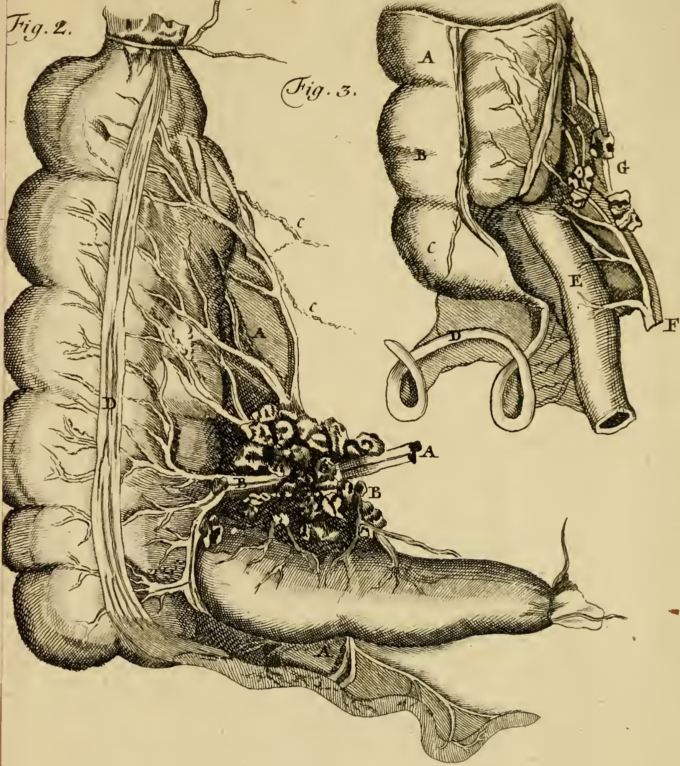
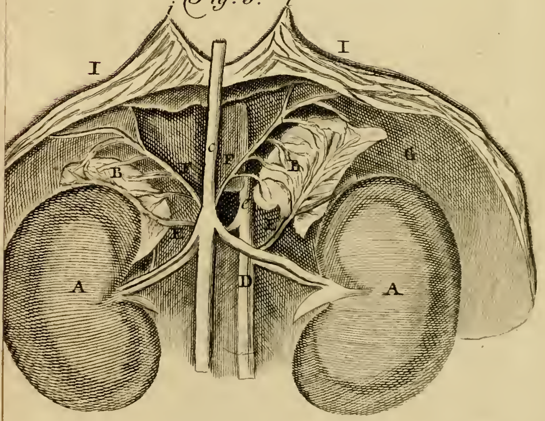
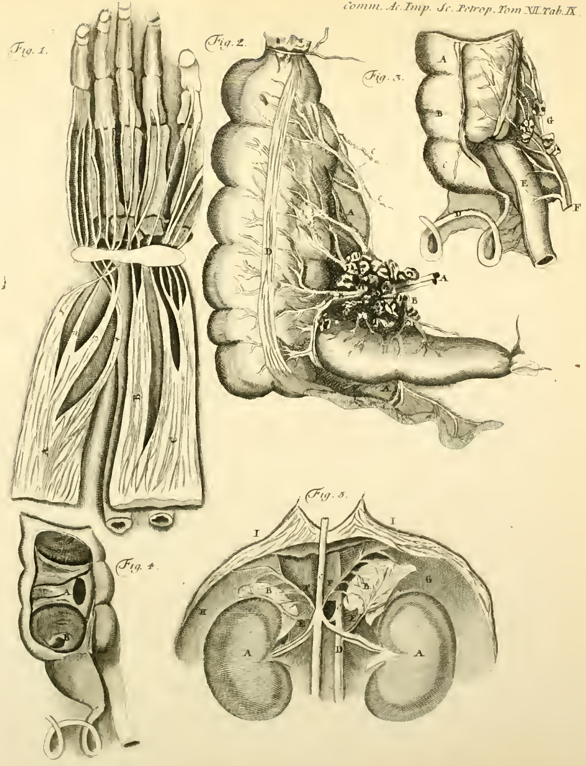


Fig. 5.




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

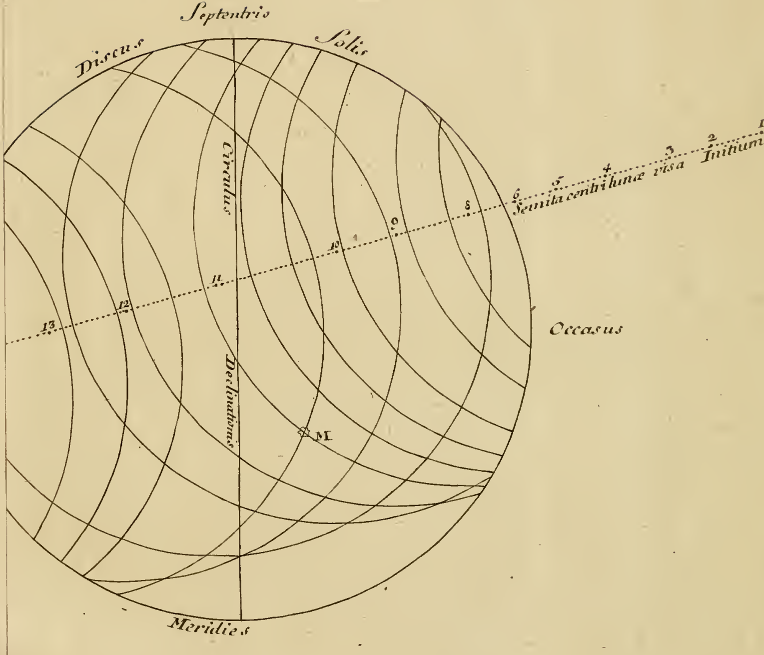
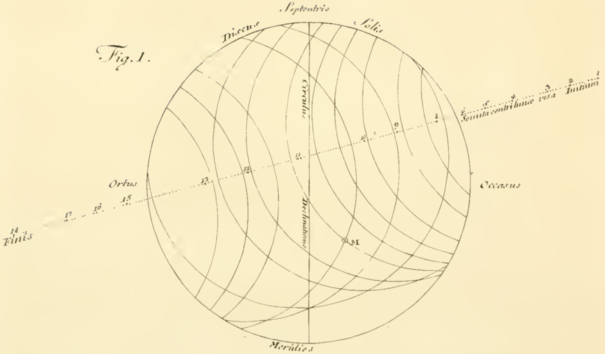
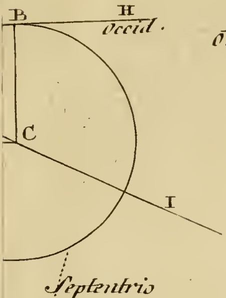

Septentrio
Discus
Solis
Circulus
Declinationis
Semita centri lunæ visa
Initium
1
2
3
4
5
6
8
9
10
11
12
13
Occasus
M
Meridies

Fig. 1.


Septentrio
Discus
Solis
Circulus
Declinationis
Semita centri lunae visa
Initium
Ortus
Occasus
Finis
M
Meridies



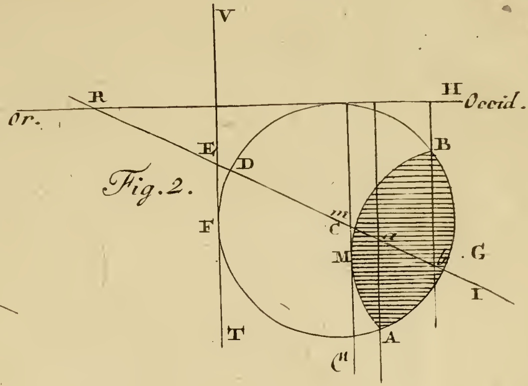
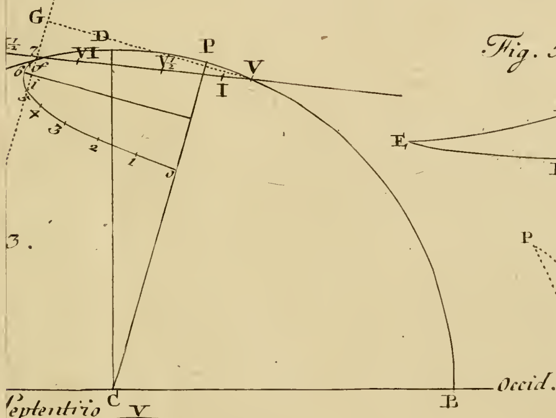


Fig. 2.



3.

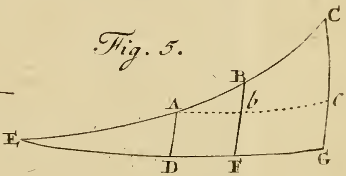


Fig. 5.

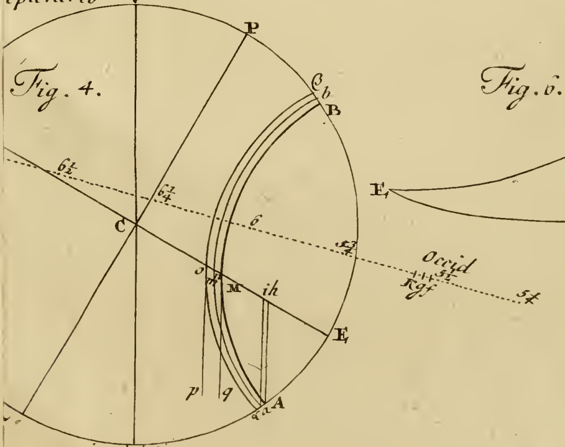


Fig. 4.

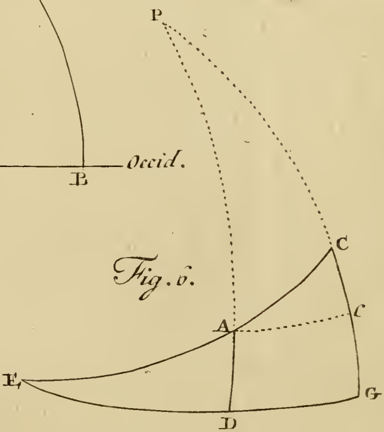
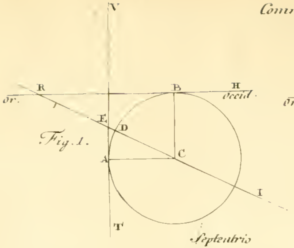
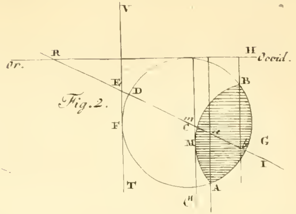
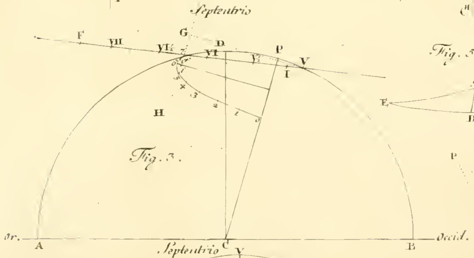
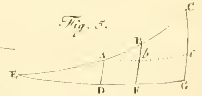


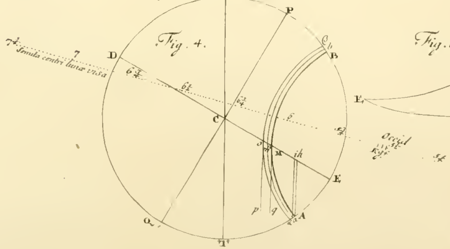
Fig. 6.

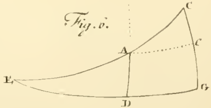

Fig. 1.
V
R
B
H
or.
occid.
E
D
C
A
I
T


Fig. 2.
V
R
H
or.
Occid.
E
D
B
F
m
C
M
G
I
T
A


Fig. 3.
Septentrio
G
F
VII
D
VI
P
V
I
H
or.
Occid.
A
C
B
Septentrio


Fig. 5.
C
B
A
b
c
E
D
F
G


Fig. 4.
V
P
B
D
7
Semita centri lunæ visa
C
M
E
Occid.
p
q
A
Q
T


Fig. 6.
C
A
c
E
D
G

AMNH LIBRARY
100127239